Санкт-Петербургский государственный университет

Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Геометрия и топология
Geometry and Topology

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 19

Регистрационный номер рабочей программы: 043166

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1.1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений о геометрии и топологии в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов геометрии и топологии.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Не предусмотрены.

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: базовые понятия топологии, свойства топологических пространств, топологические многообразия, евклидова, аффинная и проективная геометрия, выпуклые множества, начала алгебраической топологии, гладкие многообразия, метрики на многообразиях и расслоения, дифференциальная топология, тензоры на многообразиях, геодезические и кривизна; уяснить логику и технику построения математической теории как фундамента самостоятельных научных исследований

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

практические занятия 96 часов, контрольные работы 8 часов, промежуточная аттестация (зачеты и экзамены) 16 часов

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий
2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																		
	Контактная работа обучающихся с преподавателем												Самостоятельная работа				ера кти вн	дое мк ост
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)	итоговая аттестация (сам.раб.)		
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																		
очная форма обучения																		
Семестр 1	32		2	12		2(1)			2				56		36		18	4
	2-50		2-50	10-25		10-25			2-50				1-1		1-1			
Семестр 2	64		2	28		2(1)			2				86		30		34	6
	2-50		2-50	10-25		10-25			2-50				1-1		1-1			
Семестр 3	48		2	28		2(1)			2				64		32		34	5
	2-50		2-50	10-25		10-25			2-50				1-1		1-1			
Семестр 4	32		2	28		2(1)			2				46		30		34	4
	2-50		2-50	10-25		10-25			2-50				1-1		1-1			
ИТОГО	176		8	96		8			8				252		128			19

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
очная форма обучения						
Семестр 1			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 2			зачёт, по результатам	по графику промежуточной		

			работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	аттестации, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 3			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 4			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): **Семестр 1**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Базовые понятия топологии	Лекции	12
		практические занятия	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	21
2	Свойства топологических пространств	Лекции	12
		практические занятия	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	21
3	Контрольная работа	контрольная работа	2
4	Топологические многообразия	Лекции	8
		практические занятия	4
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	14
5	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
6	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	36

Раздел 1: Базовые понятия топологии
1. Метрические пространства. Примеры: единичная метрика, прямая, плоскость, R^n, подмножество метрического пространства, нестандартные метрики на плоскости. Открытые и замкнутые шары, сферы, примеры. Ограниченные множества, диаметр. Открытые множества. Примеры открытых и неоткрытых множеств. Открытость — относительное свойство. Объединения и пересечения открытых множеств. Бесконечное пересечение открытых множеств не всегда открыто.
2. Топологические пространства, примеры: метрическое, дискретное, антидискретное, двухточечные топологии, стрелка. Метризуемые и неметризуемые пространства. Сравнение топологий, топологическая эквивалентность метрик, примеры.
Замкнутые множества. Примеры. Правила де Моргана для дополнений. Пересечения и конечные объединения замкнутых множеств.
3. Окрестности. Расположение точки относительно множества. Внутренность и замыкание. Всюду плотные множества, пример: Q в R.
Базы топологии, критерий базы, примеры. Порядковая топология. Предбазы. База в точке. Индуцированная топология подпространства, согласованность с метрическим определением, транзитивность. Замкнутость в подпространстве. Открытые и замкнутые подпространства. Наследственные свойства.
4. Отображения, образ, прообраз. Непрерывные отображения. Прообразы замкнутых множеств. Примеры: const, id, включение, дискретный и антидискретный случай. Усиление и ослабление топологий. Композиция. Сужение и сокращение области значений. Непрерывность в точке. Метрическое эпсилон-дельта определение. Отображения метрических пространств: изометрии, липшицевость, расстояние до точки и множества. Фундаментальные покрытия.

5. Произведения топологических и метрических пространств. R^n как произведение. Произведение замкнутых множеств. Непрерывность слоевых вложений и проекций, теорема о покоординатной непрерывности.
Сумма, произведение, частное, максимум, минимум непрерывных функций. Замкнутость и открытость множеств, заданных системами уравнений и неравенств.
6. Гомеоморфизм. Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом. Примеры гомеоморфных пространств: интервалы, квадрат и круг, проколотая сфера и плоскость. Топологические свойства и инварианты. Термины: вложение, открытое отображение, замкнутое отображение.

Раздел 2: Свойства топологических пространств

1. Первая и вторая аксиома счетности. Сепарабельность, ее эквивалентность 2АС в метрическом случае. Пример: R^n.
Аксиомы отделимости. Хаусдорфовость, регулярность, нормальность. Нормальность метрических пространств. Сохранение хаусдорфовости и регулярности при перемножении. Лемма Урысона и продолжимость непрерывных функций.
2. Предел последовательности. Единственность предела в хаусдорфовом пространстве. Замыкание, замкнутость и непрерывность в терминах последовательностей в пространстве с 1АС. Предел отображения в точке.
Топология расширенной прямой. Предел последовательности и предел функции на бесконечности как частные случаи предела в точке.
3. Связность. Связность отрезка. Связность непрерывного образа. Компоненты связности, их замкнутость.
Линейная связность, связность и линейная связность, непрерывный образ, компоненты. Негомеоморфность разных видов интервалов, окружности, областей в больших размерностях. Локальная связность и локальная линейная связность, открытость компонент.
4. Покрытия и подпокрытия. Теорема Гейне-Бореля. Компактность. Примеры: конечные пространства, отрезок, некомпактность других интервалов. Замкнутое подмножество компактного пространства компактно. Компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. Нормальность хаусдорфовых компактов. Компакт в метрическом пространстве ограничен. Произведение компактов компактно. Компактные множества в R^n.
5. Центрированные и вложенные семейства компактов.
Непрерывный образ компакта компактен. Теорема Вейерштрасса. Инъективное непрерывное отображения из компактного пространства в хаусдорфово — вложение. Секвенциальная компактность. Ее эквивалентность компактности для метрических пространств. Лемма Лебега. Равномерная непрерывность на компакте.
6. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Темы для дополнительных заданий: пополнение, теорема Бэра.
Сети и вполне ограниченность. Компактность через полноту и вполне ограниченность. Сепарабельность метрических компактов. Локальная компактность.

Раздел 3: Топологические многообразия

1. Факторпространство, непрерывность проекции, свойство универсальности. Сохранение компактности, связности, сепарабельности. Окружность как фактор отрезка, сфера как фактор шара. Склеивание и приклеивание. Цилиндр, лист Мебиуса, тор, бутылка Клейна, проективная плоскость. Проективные пространства.

2. Многообразия и многообразия с краем, примеры. Топологические свойства многообразий, разбиение на компоненты связности. Классификация одномерных многообразий.

3. Знакомство с классическими поверхностями: сферы с ручками и пленками, ориентируемость, эйлерова характеристика. Теорема о классификации двумерных поверхностей с частичным доказательством.

Темы для дополнительных заданий: бесконечные (тихоновские) произведения, компактность произведения, гильбертов кирпич, теоремы о метризуемости.

Период обучения (модуль): **Семестр 2**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Евклидова, аффинная и проективная геометрия	лекции	20
		практические занятия	18
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	27
2	Выпуклые множества	лекции	14
		практические занятия	10
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	19
3	Контрольная работа	контрольная работа	2
4	Начала алгебраической топологии	лекции	30
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	40
5	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
6	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	30

Раздел 1: Евклидова, аффинная и проективная геометрия

1. Евклидово скалярное произведение. Примеры. Длина вектора и расстояние. Неравенство Коши-Шварца и неравенство треугольника. Угол между векторами, неравенство треугольника для углов. Ортогональность, ортонормированные наборы. Ортогонализация по Граму-Шмидту и существование ортонормированных базисов. Ортогональное дополнение, ортогональная проекция.
2. Изоморфизм евклидовых пространств, изоморфность евклидовых пространств одинаковой размерности, изометрические линейные отображения и их матрицы, ортогональные преобразования. Ориентация векторного пространства, собственные и несобственные преобразования. Соответствие между векторами и линейными функциями. Векторное произведение.
3. Аффинное пространство, параллельный перенос. Векторизация выбором начала отсчета и аффинные базисы. Барицентрические и сбалансированные комбинации точек.
4. Подпространства, параллельность. Прямые, гиперплоскости. Пересечения подпространств, аффинные оболочки, аффинно независимые наборы точек, барицентрические координаты. Центры масс, группировка масс.
5. Аффинные отображения. Задание аффинного отображения на точечном базисе. Образы и прообразы подпространств, задание подпространств уравнениями. Отрезки и полупространства. Характеризации аффинных отображений.

6. Евклидово аффинное пространство. Нормаль и расстояние до гиперплоскости. Движения, классификация движений в малых размерностях.
7. Знакомство с проективной плоскостью: различные модели. Проективные пространства и подпространства, аффинные карты и проективное пополнение аффинного пространства. Однородные координаты, уравнения подпространств.
8. Проективные отображения, продолжения аффинных, свойства транзитивности. Центральная проекция. Метод отправки на бесконечность, теоремы Дезарга и Паппа. Темы для дополнительных заданий: проективная прямая, двойное отношение.
9. Квадрики. Преобразование уравнений при замене координат. Приведение квадратичной формы к диагональному виду. Евклидова и аффинная классификация квадрик. Двумерный и трехмерный случай.
10. Проективное пополнение квадрики, проективная классификация квадрик. Темы для дополнительных заданий: касательные и двойственность, проективная параметризация коники, теоремы Паскаля и Брианшона.

Раздел 2: Выпуклые множества

1. Выпуклые множества, примеры. Выпуклые оболочки и выпуклые комбинации. Симплексы. Лемма Каратеодори, выпуклая оболочка компакта. Теоремы Радона и Хелли. Сумма по Минковскому. Выпуклые конусы.
2. Внутренность и замыкание выпуклого множества, относительная внутренность. Топологическая классификация выпуклых компактов.
3. Теоремы об отделимости, опорные гиперплоскости. Поляры. Теорема о биполяре.
4. Экстремальные (крайние) точки, конечномерная теорема Крейна-Мильмана. Темы для дополнительных заданий: экспонированные точки, теорема Страшевича.
5. Полиэдральные множества, выпуклые многогранники, теорема Вейля-Минковского и следствия.
6. Строение неограниченного выпуклого множества: асимптотический конус, линейная часть. Двойственность конусов. Острые конусы, эквивалентность разных определений. Теорема Вейля-Минковского для конусов и общих полиэдральных множеств.
7. Грани, гиперграни, минимальное представление полиэдрального множества. Темы для дополнительных заданий: решетка граней, лемма Фаркаша, примеры задач линейной оптимизации, применения двойственности.

Раздел 3: Начала алгебраической топологии

1. Гомотопия, отношение гомотопности отображений. Стягиваемые отображения, случай сферы. Односвязность и n-связность. Односвязность звездных множеств и сфер.
2. Связанная гомотопия. Путь, гомотопия путей, произведение путей. Петли, свободные и связанные гомотопии петель, стягиваемые петли, переформулировки односвязности.
3. Фундаментальная группа. Перенос фундаментальной группы вдоль пути, ее независимость от отмеченной точки. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцируемый отображением. Гомоморфизмы, индуцированные гомотопными отображениями. Фундаментальная группа произведения.
3. Накрытия. Примеры. Количество листов накрытия со связной базой постоянно. Теоремы о поднятии пути и поднятии гомотопии. Универсальные накрытия, соответствие между фундаментальной группой и прообразом точки. Фундаментальная группа проективного пространства, окружности, проколотой плоскости, тора.
4. Приложения: теоремы Борсука и Брауэра, пересечение путей в квадрате, основная теорема алгебры. Непрерывный аргумент и индекс кривой относительно точки на плоскости. Инвариантность размерности и края в двумерном случае. Универсальное накрытие и фундаментальная группа букета окружностей.
5. Существование универсальных накрытий. Критерий существования поднятия отображения. Группа автоморфизмов универсального накрытия. Соответствие между

накрытиями и подгруппами фундаментальной группы. Темы для дополнительных заданий: иерархия накрытий, регулярные накрытия.
6. Гомотопическая эквивалентность. Деформационные ретракции. Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств.
7. Клеточные пространства, примеры: клеточное разбиение сферы, проективной плоскости, классических поверхностей. Клеточные подпространства. Теорема Борсука о продолжении гомотопии. Факторизация по стягиваемому подпространству. Темы для дополнительных заданий: клеточная аппроксимация.
8. Фундаментальная группа одномерного клеточного пространства. Приложение: подгруппы свободных групп. Задание группы образующими и соотношениями. Теорема Зейферта-ван Кампена. Фундаментальная группа клеточного пространства. Группы поверхностей, их неизоморфность.
Темы для дополнительных заданий: узлы и зацепления, группа дополнения узла, раскраски узлов, начальные идеи теории гомологий, лемма Шпернера и ее применение, топологические группы.

Период обучения (модуль): **Семестр 3**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Гладкие многообразия	лекции	20
		практические занятия	16
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	27
2	Метрики на многообразиях и расслоения	лекции	12
		практические занятия	12
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	16
3	Контрольная работа	контрольная работа	2
4	Дифференциальная топология	лекции	16
		практические занятия	
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	21
5	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
6	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	32

Раздел 1: Гладкие многообразия

1. Регулярные кривые, длина, натуральная параметризация. Кратчайшие в R^n и на сфере. Кривизна кривой и формулы Френе на плоскости. Кривизна прямой и окружности, соприкасающаяся окружность, радиус и центр кривизны. Кривизна в произвольной параметризации. Поворот и восстановление кривой по кривизне.
2. Теорема о повороте простой замкнутой кривой. Параллельные кривые и расстояние до кривой. Выпуклые кривые, критерии выпуклости. Теорема о четырех вершинах.
3. Кривизна и главная нормаль кривой в R^n, неравенство Фенхеля. Бинормаль, кручение и формулы Френе в R^3. Базис Френе и формулы Френе в R^n. Натуральное уравнение

кривой. Формулы Френе в произвольной параметризации. Соприкасающаяся сфера кривой и кривые на сфере.
4. Классы гладкости, бесконечная гладкость. Определение гладкого многообразия: карты, атласы, дифференциальная структура, максимальный атлас. Примеры: R^n, открытые подмножества, напоминание о поверхностях из анализа. Задание топологии картами.
Гладкие отображения, диффеоморфизмы, локальные диффеоморфизмы.
Подмногообразия, дифференциальная структура подмногообразия. Гладкость отображения в подмногообразие и из подмногообразия.
Произведения и накрывающие пространства многообразий.
5. Касательные векторы к подмногообразию R^n (скорости кривых), касательное пространство, согласованность с определением из анализа.
Касательный вектор к многообразию как класс кривых. Координаты касательного вектора, их преобразование при замене карты. Линейная структура на касательном пространстве.
Касательное расслоение и его дифференциальная структура. Стандартные отождествления.
Производная (касательное отображение) гладкого отображения, производная композиции, производная и вектор скорости, теорема об обратном отображении.
6. Касательные векторные поля, траектории и поток векторного поля.
Кольцо и пучок гладких функций, касательные векторы и векторные поля как дифференцирования.
Скобка Ли векторных полей. Скобка Ли в координатах. Скобка Ли и подмногообразия.
Коммутирующие поля и критерий интегрируемости уравнения первого порядка в частных производных.
7. Погружения и вложения, их образы. Вложение компактного многообразия в R^N.
Теорема о прообразе регулярного значения, касательное пространство к прообразу.
Трансверсальные пересечения подмногообразий.
8. Гладкие многообразия с краем. Касательное пространство в точке края и его разбиение на полупространства. Подмногообразия с краем. Теорема о прообразе регулярного значения для многообразий с краем. Теорема о воротнике.
Ориентация многообразия и ориентация его касательных пространств. Ориентация края.
Ориентирующее двулистное накрытие, перенос ориентации вдоль пути, дезориентирующие циклы.
9. Паракомпактность многообразия, локально конечные покрытия координатными шарами. Носитель функции, локально конечные семейства функций. Гладкое разбиение единицы. Гладкая лемма Урысона, сглаживание непрерывных функций, продолжимость гладких функций.
10. Лемма о понижении размерности вложения. Теорема Уитни о вложении: компактный случай, существование инъективного погружения в R^{2n+1}, близкого к данному отображению. Собственные отображения, их замкнутость. Существование исчерпывающей функции и замкнутого вложения в R^{2n+1}.

Раздел 2: Метрики на многообразиях и расслоения

1. Римановы метрики, их представление в координатах. Пример: индуцированная метрика на подмногообразии. Изометрии, изометрические вложения и погружения. Длина гладкой кривой в римановом многообразии. Изометрии и длины. Примеры изгибаний плоскости.
Риманово расстояние, риманово многообразие как метрическое пространство.
2. Углы, конформные отображения. Инверсия на плоскости и в R^n, образы сфер, сохранение углов. Мебиусовы преобразования R^n. Стереографическая проекция и мебиусовы преобразования сферы. Мебиусовы преобразования плоскости как комплексные дробно-линейные функции.

3. Плоскость Лобачевского и гиперболическое пространство: модель Пуанкаре в полупространстве. Изометрии и прямые. Модель в круге (шаре), транзитивность на флагах, форма гиперболических шаров в моделях. Модель на гиперболоиде.
4. Расслоения и сопутствующая терминология. Тривиальные и локально тривиальные расслоения. Векторные расслоения, морфизмы, эквивалентность. Расслоения со структурной группой. Индуцированные расслоения.
Конструкции векторных расслоений: сумма Уитни, двойственное расслоение, подрасслоения и факторы, тензорное и внешнее произведение, послойное применение непрерывного (гладкого) функтора.
5. Евклидовы расслоения и ортогональные дополнения. Нормальные расслоения и трубчатые окрестности. Ориентированные векторные расслоения.
Тривиальность расслоения над отрезком. Векторные расслоения над окружностью. Гомотопные расслоения, их эквивалентность. Тривиальность расслоения со стягиваемой базой.
6. Тавтологическое расслоение. Гомотопическая классификация векторных расслоений. Расслоения над сферой.

Раздел 3: Дифференциальная топология

1. Топологии на пространствах отображений. Теоремы о сглаживании, относительное сглаживание.
2. Теорема Сарда. Обобщенная теорема Борсука. Степень отображения и степень mod 2. Гомотопическая инвариантность степени mod 2 и ее независимость от точки.
3. Каноническая ориентация прообраза регулярного значения. Гомотопическая инвариантность степени и независимость от точки. Степень непрерывного отображения. Степень диффеоморфизма, степень и сюрьективность, степень композиции.
4. Степень в категории многообразий с краем, степень отображения равна степени сужения на край. Индекс гиперповерхности относительно точки в R^n, следствия о разбиении и ориентируемости вложенной гиперповерхности. Гомотопическая классификация отображений в сферу.
5. Трансверсальность отображений, теорема Тома о трансверсальности. Индекс пересечения, его гомотопическая инвариантность. Вложенные гиперповерхности в односвязном многообразии.
6. Гессиан функции в критической точке (корректность определения). Функции Морса, их существование. Градиентный поток и теорема о регулярном интервале.
7. Индекс особой точки, лемма Морса. Многообразия с двумя критическими точками. Приклеивание ручек при переходе через критическую точку. Приклеивание ручек и приклеивание клеток. Эйлерова характеристика, неравенства Морса.
8. Число Эйлера векторного расслоения, индексы нулей векторных полей.

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Тензоры на многообразиях	лекции	16
		практические занятия	16
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	23
2	Контрольная работа	контрольная работа	2
3	Геодезические и кривизна	лекции	16
		практические занятия	12
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	23

4	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
5	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	30

Раздел 1: Тензоры на многообразиях
1. Внешняя геометрия поверхности в R^n: вторая квадратичная форма относительно нормали, вычисление ее в координатах, нормальная и геодезическая компонента кривизны кривой. Случай гиперповерхности: теорема Менье, кривизна поверхности по направлению, главные направления и главные кривизны. Размерность 2: теорема Эйлера, гауссова и средняя кривизна, соприкасающийся параболоид, типы точек.
2. Касательная компонента производной нормального поля. Случай гиперповерхности: гауссово отображение и его производная, теорема Родрига.
Выпуклые гиперповерхности, выпуклость и кривизны.
Параллельные гиперповерхности, расстояние до поверхности, фокальные точки.
Формулы типа Френе и специальные кривые.
3. Риманов объем, якобиан и формула площади для гладкого вложения (из курса анализа). Якобиан гауссова отображения и интеграл гауссовой кривизны по выпуклой поверхности. Степень гауссова отображения и формула Гаусса-Бонне для гиперповерхности. Сумма углов треугольника на сфере и плоскости Лобачевского.
4. Евклидова структура на внешней алгебре, теорема Пифагора для площадей. Якобиан и формула коплощади для регулярного отображения. Риманов градиент и формула коплощади для числовой функции. Пример: евклидова область, расслоенная на уровни дистанционных функций. Площади параллельных поверхностей и объем окрестности.
5. Векторное поле вдоль кривой и вдоль отображения. Нормальная компонента производной касательного поля. Ковариантное дифференцирование и его свойства. Символы Кристоффеля, выражение ковариантной производной через них.
6. Выражение символов Кристоффеля через метрический тензор. Деривационные формулы и единственность поверхности с данными первой и второй формой. Уравнение Гаусса, Theorema Egregium. Развертывающиеся поверхности.
7. Тензоры на многообразии. Тензориальность и линейность и линейность над кольцом гладких функций. Связности на векторных расслоениях. Аффинная связность, представление в координатах. Индуцированная связность. Параллельный перенос, группа голономии.
8. Евклидова связность. Кручение связности, связность Леви-Чивита, ее существование и единственность. Связность Леви-Чивита подмногообразия. Вторая форма подмногообразия. Производная нормального векторного поля, оператор формы гиперповерхности.
Раздел 2: Геодезические и кривизна
1. Геодезические, их существование и единственность, экспоненциальное отображение, радиус инъективности, нормальные и полярные координаты.
Градиент и константа Липшица, функции дистанционного типа и их градиентные линии. Лемма Гаусса, геодезические и кратчайшие.
2. Полные римановы многообразия: метрическая и геодезическая полнота. Теорема Хопфа-Ринова, существование кратчайших, компактность шаров. Дифференцирование расстояния. Сопряженные точки. Когда геодезическая перестает быть кратчайшей.
3. Кривизна аффинной связности. Оператор кривизны и голономия. Плоские метрики и равенство нулю тензора кривизны.
Симметрии тензора кривизны, тензор кривизны в двумерном случае.

4. Голономия границы области, формула Гаусса-Бонне. Кривизна и эйлерова характеристика поверхности. Метрики постоянной кривизны на поверхностях.
5. Секционные кривизны. Вид тензора кривизны при постоянной секционной кривизне. Кривизна подмногообразия. Вполне геодезические подмногообразия.
6. Геодезические вариации, поля Якоби, уравнение Якоби. Поля Якоби и сопряженные точки. Размерность 2: полугеодезические координаты, уравнение Якоби, его начальные данные для полярных координат.
7. Поверхности постоянной гауссовой кривизны: локальная изометричность, универсальное накрывающее.
8. Сравнение решений уравнения Якоби. Сравнение длин, площадей и углов при неравенствах на гауссову кривизну. Кривизна и диаметр.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий
3.1. Методическое обеспечение
3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и практических занятий

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения зачета
Зачет проводится в устной форме. Для получения зачета необходимо решить 60% задач, предлагаемых в течение семестра. В случае, если к моменту проведения зачета студент решил меньшее количество задач, на зачете ему предлагаются задачи аналогичные по тематике и сложности. Задачи даются в форме домашних заданий с устной сдачей («листочки»), письменных домашних заданий и контрольных. Темы задач фиксированы, количество и форма выдачи остается на усмотрение преподавателя практических занятий. Возможна выдача задач повышенной сложности, решение которых засчитывается в качестве индивидуальных достижений студента (при подаче заявок на именные стипендии, конкурсы и т.п.); сдача таких заданий проводится в устной форме.

Методика проведения экзамена
Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.
Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.
Критерии выставления оценок
Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.
Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).
Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.
Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): **Семестр 1**

Темы **задач**:

1. Метрические и топологические пространства. Расстояние по Хаусдорфу.
2. Непрерывные и разрывные отображения, гомеоморфные пространства. Контрпримеры в топологии. Гомеоморфность и негомеоморфность графов.
3. Длина пути в метрическом пространстве. Пространства функций и отображений.

Список вопросов к экзамену:

1. Метрические пространства. Открытые и замкнутые шары, сферы. Ограниченные множества, диаметр. Открытые множества.
2. Топологические пространства, примеры: метрическое, дискретное, антидискретное, двухточечные топологии, стрелка, T1. Метризуемость. Сравнение топологий, топологическая эквивалентность метрик, примеры. Замкнутые множества.
3. Окрестности. Расположение точки относительно множества. Внутренность и замыкание. Всюду плотные множества, пример: Q в R.
4. Базы топологии. Предбазы. База в точке. Индуцированная топология подпространства. Наследственные свойства.
5. Отображения, образ, прообраз. Непрерывные отображения. Прообразы замкнутых множеств. Усиление и ослабление топологий. Композиция. Сужение и сокращение области значений.
6. Непрерывность в точке. Метрическое эпсилон-дельта определение. Отображения метрических пространств: изометрии, липшицевость, расстояние до точки и множества. Фундаментальные покрытия.
7. Произведения топологических и метрических пространств. R^n как произведение. Произведение замкнутых множеств. Непрерывность слоевых вложений и проекций, теорема о покоординатной непрерывности.
8. Гомеоморфизм. Пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом. Примеры гомеоморфных пространств: интервалы, квадрат и круг, проколотая сфера и плоскость. Топологические свойства и инварианты. Термины: вложение, открытое отображение, замкнутое отображение.
9. Первая и вторая аксиома счетности. Сепарабельность, ее эквивалентность 2АС в метрическом случае. Пример: R^n. Аксиомы отделимости. Хаусдорфовость, регулярность, нормальность.
10. Нормальность метрических пространств. Сохранение хаусдорфовости и регулярности при перемножении. Лемма Урысона и продолжимость непрерывных функций.
11. Предел последовательности. Единственность предела в хаусдорфовом пространстве. Замыкание, замкнутость и непрерывность в терминах последовательностей в пространстве с 1АС. Предел отображения в точке. Предел последовательности и предел функции на бесконечности как частные случаи предела в точке.
12. Связность. Связность отрезка. Связность непрерывного образа. Компоненты связности, их замкнутость.
13. Линейная связность, связность и линейная связность, непрерывный образ, компоненты. Негомеоморфность разных видов интервалов, окружности, областей в больших размерностях. Локальная связность и локальная линейная связность, открытость компонент
14. Покрытия и подпокрытия. Теорема Гейне-Бореля. Компактность. Примеры: конечные пространства, отрезок, некомпактность других интервалов. Замкнутое подмножество компактного пространства компактно. Компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут.
15. Нормальность хаусдорфовых компактов. Компакт в метрическом пространстве ограничен. Произведение компактов компактно. Компактные множества в R^n.

16. Центрированные и вложенные семейства компактов. Непрерывный образ компакта компактен. Теорема Вейерштрасса. Инъективное непрерывное отображения из компактного пространства в хаусдорфово — вложение.
17. Секвенциальная компактность. Ее эквивалентность компактности для метрических пространств. Лемма Лебега. Равномерная непрерывность на компакте.
18. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Пополнение. Теорема Бэра.
19. Сети и вполне ограниченность. Компактность через полноту и вполне ограниченность. Сепарабельность метрических компактов.
20. Локальная компактность, одноточечная компактификация.
21. Факторпространство, непрерывность проекции, свойство универсальности. Сохранение компактности, связности, сепарабельности. Окружность как фактор отрезка, сфера как фактор шара.
22. Склеивание и приклеивание. Цилиндр, лист Мебиуса, тор, бутылка Клейна, проективная плоскость. Проективные пространства.
23. Многообразия и многообразия с краем, примеры. Топологические свойства многообразий, разбиение на компоненты связности. Классификация одномерных многообразий.
24. Сферы с ручками и пленками, ориентируемость, эйлерова характеристика. Теорема о классификации двумерных поверхностей с частичным доказательством.

Период обучения (модуль): **Семестр 2**

Темы **задач**:

1. Скалярное произведение в R^n. Вычисление расстояний и углов. Прямые и плоскости, пересечения, углы. Расстояние между точками, прямыми и плоскостями. Векторное произведение. Площади и объемы. Барицентрические координаты и геометрия масс.
2. Окружности и сферы. Движения и подобия. Вещественная и комплексная запись. Эллипс, гипербола, парабола. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду. Касательные к кривым второго порядка.
3. Выпуклые тела. Опорные гиперплоскости. Поляры.
4. Конусы. Полиэдральные множества. Задачи линейной оптимизации.

Список вопросов к экзамену:

1. Евклидово скалярное произведение. Примеры. Длина вектора и расстояние. Неравенство Коши-Шварца и неравенство треугольника. Угол между векторами, неравенство треугольника для углов. Ортогональность, ортонормированные наборы. Ортогонализация по Граму-Шмидту и существование ортонормированных базисов. Ортогональное дополнение, ортогональная проекция.
2. Изоморфизм евклидовых пространств, изоморфность евклидовых пространств одинаковой размерности, изометрические линейные отображения и их матрицы, ортогональные преобразования. Ориентация векторного пространства, собственные и несобственные преобразования. Соответствие между векторами и линейными функциями. Векторное произведение.
3. Аффинное пространство, параллельный перенос. Векторизация выбором начала отсчета и аффинные базисы. Барицентрические и сбалансированные комбинации точек.
4. Подпространства, параллельность. Прямые, гиперплоскости. Пересечения подпространств, аффинные оболочки, аффинно независимые наборы точек, барицентрические координаты. Центры масс, группировка масс.

5. Аффинные отображения. Задание аффинного отображения на точечном базисе. Образы и прообразы подпространств, задание подпространств уравнениями. Отрезки и полупространства. Характеризации аффинных отображений.
6. Евклидово аффинное пространство. Нормаль и расстояние до гиперплоскости. Движения, классификация движений в малых размерностях.
7. Знакомство с проективной плоскостью: различные модели. Проективные пространства и подпространства, аффинные карты и проективное пополнение аффинного пространства. Однородные координаты, уравнения подпространств.
8. Проективные отображения, продолжения аффинных, свойства транзитивности. Центральная проекция. Метод отправки на бесконечность, теоремы Дезарга и Паппа. Темы для дополнительных заданий: проективная прямая, двойное отношение.
9. Квадрики. Преобразование уравнений при замене координат. Приведение квадратичной формы к диагональному виду. Евклидова и аффинная классификация квадрик. Двумерный и трехмерный случай.
10. Проективное пополнение квадрики, проективная классификация квадрик.
11. Выпуклые множества, примеры. Выпуклые оболочки и выпуклые комбинации. Симплексы. Лемма Каратеодори, выпуклая оболочка компакта. Теоремы Радона и Хелли.
12. Сумма по Минковскому. Выпуклые конусы, лемма Каратеодори для конусов. Внутренность и замыкание выпуклого множества, относительная внутренность. Топологическая классификация выпуклых компактов.
13. Теоремы об отделимости, опорные гиперплоскости. Поляры. Теорема о биполяре.
14. Экстремальные (крайние) точки, конечномерная теорема Крейна-Мильмана.
15. Полиэдральные множества, выпуклые многогранники, теорема Вейля-Минковского, следствия о сумме и проекции многогранника. Строение неограниченного выпуклого множества: асимптотический конус, линейная часть.
16. Двойственность конусов. Острые конусы, эквивалентность разных определений. Теорема Вейля-Минковского для конусов и общих полиэдральных множеств, следствия.
17. Гомотопия, отношение гомотопности отображений. Стягиваемые отображения, случай сферы. Односвязность и n-связность. Односвязность звездных множеств и сфер.
18. Связанная гомотопия. Путь, гомотопия путей, произведение путей. Петли, свободные и связанные гомотопии петель, стягиваемые петли, переформулировки односвязности.
19. Фундаментальная группа. Перенос фундаментальной группы вдоль пути, ее независимость от отмеченной точки.
20. Гомоморфизм фундаментальных групп, индуцируемый отображением. Гомоморфизмы, индуцированные гомотопными отображениями. Фундаментальная группа произведения.
21. Накрытия. Примеры. Количество листов накрытия со связной базой постоянно. Теоремы о поднятии пути и поднятии гомотопии.
22. Универсальные накрытия, соответствие между фундаментальной группой и прообразом точки. Фундаментальная группа проективного пространства, окружности, проколотой плоскости, тора.
23. Теоремы Борсука и Брауэра. Инвариантность размерности и края в двумерном случае. Непрерывный аргумент и индекс кривой относительно точки на плоскости. Основная теорема алгебры.
24. Универсальное накрытие и фундаментальная группа букета окружностей.
25. Существование универсальных накрытий.
26. Критерий существования поднятия отображения. Группа автоморфизмов универсального накрытия. Соответствие между накрытиями и подгруппами фундаментальной группы.
27. Гомотопическая эквивалентность. Деформационные ретракции. Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств.

28. Клеточные пространства, примеры. Клеточные подпространства. Теорема Борсука о продолжении гомотопии. Факторизация по стягиваемому подпространству.
29. Фундаментальная группа одномерного клеточного пространства. Подгруппы свободных групп.
30. Задание группы образующими и соотношениями. Теорема Зейферта-ван Кампена.
31. Фундаментальная группа клеточного пространства. Группы поверхностей, их неизоморфность.

Период обучения (модуль): **Семестр 3**

Темы **задач**:

1. Формулы Френе для кривой в пространстве.
2. Цилиндры, конусы, поверхность касательных. Поверхности вращения. Изгибания поверхностей.
3. Псевдосфера, катеноид, геликоид.
4. Внутренняя геометрия сферы. Внутренняя геометрия плоскости Лобачевского.

Список вопросов к экзамену:

1. Регулярные кривые, длина, натуральная параметризация. Кратчайшие в R^n и на сфере. Кривизна кривой и формулы Френе на плоскости. Кривизна прямой и окружности, соприкасающаяся окружность, радиус и центр кривизны. Кривизна в произвольной параметризации. Поворот и восстановление кривой по кривизне.
2. Теорема о повороте простой замкнутой кривой. Параллельные кривые и расстояние до кривой. Выпуклые кривые, критерии выпуклости. Теорема о четырех вершинах.
3. Кривизна и главная нормаль кривой в R^n, неравенство Фенхеля. Бинормаль, кручение и формулы Френе в R^3. Базис Френе и формулы Френе в R^n. Натуральное уравнение кривой. Формулы Френе в произвольной параметризации. Соприкасающаяся сфера кривой и кривые на сфере.
4. Классы гладкости, бесконечная гладкость. Определение гладкого многообразия: карты, атласы, дифференциальная структура, максимальный атлас. Примеры: R^n, открытые подмножества, напоминание о поверхностях из анализа. Задание топологии картами. Гладкие отображения, диффеоморфизмы, локальные диффеоморфизмы. Подмногообразия, дифференциальная структура подмногообразия. Гладкость отображения в подмногообразие и из подмногообразия. Произведения и накрывающие пространства многообразий.
5. Касательные векторы к подмногообразию R^n (скорости кривых), касательное пространство, согласованность с определением из анализа. Касательный вектор к многообразию как класс кривых. Координаты касательного вектора, их преобразование при замене карты. Линейная структура на касательном пространстве. Касательное расслоение и его дифференциальная структура. Производная (касательное отображение) гладкого отображения, производная композиции, производная и вектор скорости, теорема об обратном отображении.
6. Касательные векторные поля, траектории и поток векторного поля. Кольцо и пучок гладких функций, касательные векторы и векторные поля как дифференцирования. Скобка Ли векторных полей. Скобка Ли в координатах.
7. Скобка Ли и подмногообразия. Коммутирующие поля и критерий интегрируемости уравнения первого порядка в частных производных.
8. Погружения и вложения, их образы. Вложение компактного многообразия в R^N. Теорема о прообразе регулярного значения, касательное пространство к прообразу. Трансверсальные пересечения подмногообразий.

9. Гладкие многообразия с краем. Касательное пространство в точке края и его разбиение на полупространства. Подмногообразия с краем. Теорема о прообразе регулярного значения для многообразий с краем. Теорема о воротнике.
10. Ориентация многообразия и ориентация его касательных пространств. Ориентация края. Ориентирующее двулистное накрытие, перенос ориентации вдоль пути, дезориентирующие циклы.
11. Паракомпактность многообразия, локально конечные покрытия координатными шарами. Носитель функции, локально конечные семейства функций. Гладкое разбиение единицы. Гладкая лемма Урысона, сглаживание непрерывных функций, продолжимость гладких функций.
12. Лемма о понижении размерности вложения. Теорема Уитни о вложении: компактный случай, существование инъективного погружения в R^{2n+1}, близкого к данному отображению. Собственные отображения, их замкнутость. Существование исчерпывающей функции и замкнутого вложения в R^{2n+1}.
13. Римановы метрики, их представление в координатах. Пример: индуцированная метрика на подмногообразии. Изометрии, изометрические вложения и погружения. Длина гладкой кривой в римановом многообразии. Изометрии и длины. Примеры изгибаний плоскости. Риманово расстояние, риманово многообразие как метрическое пространство.
14. Углы, конформные отображения. Инверсия на плоскости и в R^n, образы сфер, сохранение углов. Мебиусовы преобразования R^n. Стереографическая проекция и мебиусовы преобразования сферы. Мебиусовы преобразования плоскости как комплексные дробно-линейные функции.
15. Плоскость Лобачевского и гиперболическое пространство: модель Пуанкаре в полупространстве. Изометрии и прямые. Модель в круге (шаре), транзитивность на флагах, форма гиперболических шаров в моделях. Модель на гиперболоиде.
16. Расслоения и сопутствующая терминология. Тривиальные и локально тривиальные расслоения. Векторные расслоения, морфизмы, эквивалентность. Расслоения со структурной группой. Индуцированные расслоения. Конструкции векторных расслоений: сумма Уитни, двойственное расслоение, подрасслоения и факторы, тензорное и внешнее произведение, послойное применение непрерывного (гладкого) функтора.
17. Евклидовы расслоения и ортогональные дополнения. Нормальные расслоения и трубчатые окрестности. Ориентированные векторные расслоения. Тривиальность расслоения над отрезком. Векторные расслоения над окружностью. Гомотопные расслоения, их эквивалентность. Тривиальность расслоения со стягиваемой базой.
18. Тавтологическое расслоение. Гомотопическая классификация векторных расслоений. Расслоения над сферой.
19. Топологии на пространствах отображений. Теоремы о сглаживании, относительное сглаживание.
20. Теорема Сарда. Обобщенная теорема Борсука. Степень отображения и степень mod 2. Гомотопическая инвариантность степени mod 2 и ее независимость от точки.
21. Каноническая ориентация прообраза регулярного значения. Гомотопическая инвариантность степени и независимость от точки. Степень непрерывного отображения. Степень диффеоморфизма, степень и сюрьективность, степень композиции.
22. Степень в категории многообразий с краем, степень отображения равна степени сужения на край. Индекс гиперповерхности относительно точки в R^n, следствия о разбиении и ориентируемости вложенной гиперповерхности. Гомотопическая классификация отображений в сферу.
23. Трансверсальность отображений, теорема Тома о трансверсальности. Индекс пересечения, его гомотопическая инвариантность. Вложенные гиперповерхности в односвязном многообразии.
24. Гессиан функции в критической точке (корректность определения). Функции Морса, их существование. Градиентный поток и теорема о регулярном интервале.

25. Индекс особой точки, лемма Морса. Многообразия с двумя критическими точками. Приклеивание ручек при переходе через критическую точку. Приклеивание ручек и приклеивание клеток. Эйлерова характеристика, неравенства Морса.
26. Число Эйлера векторного расслоения, индексы нулей векторных полей.

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

Темы **задач**:

1. Линии кривизны и теорема Родрига.
2. Вторая квадратичная форма поверхности. Вычисление кривизн. Применения теоремы Менье.
3. Асимптотические линии. Геодезические. Формула первой вариации.
4. Геодезическая кривизна. Гауссова кривизна в специальных координатах.

Список вопросов к экзамену:

1. Внешняя геометрия поверхности в R^n: вторая квадратичная форма относительно нормали, вычисление ее в координатах, нормальная и геодезическая компонента кривизны кривой.
2. Теорема Менье, кривизна поверхности по направлению, главные направления и главные кривизны. Размерность 2: теорема Эйлера, гауссова и средняя кривизна, соприкасающийся параболоид, типы точек.
3. Касательная компонента производной нормального поля. Случай гиперповерхности: гауссово отображение и его производная, теорема Родрига.
4. Выпуклые гиперповерхности, выпуклость и кривизны. Параллельные гиперповерхности, расстояние до поверхности, фокальные точки. Формулы типа Френе и специальные кривые.
5. Риманов объем, якобиан и формула площади для гладкого вложения (без доказательства). Якобиан гауссова отображения и интеграл гауссовой кривизны по выпуклой поверхности. Степень гауссова отображения и формула Гаусса-Бонне для гиперповерхности. Сумма углов треугольника на сфере и плоскости Лобачевского.
6. Евклидова структура на внешней алгебре, теорема Пифагора для площадей. Якобиан и формула коплощади для регулярного отображения. Риманов градиент и формула коплощади для числовой функции. Площади параллельных поверхностей и объем окрестности.
7. Векторное поле вдоль кривой и вдоль отображения. Нормальная компонента производной касательного поля. Ковариантное дифференцирование и его свойства. Символы Кристоффеля, выражение ковариантной производной через них.
8. Выражение символов Кристоффеля через метрический тензор. Деривационные формулы и единственность поверхности с данными первой и второй формой.
9. Уравнение Гаусса, Theorema Egregium. Развертывающиеся поверхности.
10. Тензоры на многообразии. Тензориальность и линейность и линейность над кольцом гладких функций. Связности на векторных расслоениях. Аффинная связность, представление в координатах. Индуцированная связность. Параллельный перенос, группа голономии.
11. Евклидова связность. Кручение связности, связность Леви-Чивита, ее существование и единственность. Связность Леви-Чивита подмногообразия.
12. Вторая форма подмногообразия. Производная нормального векторного поля, оператор формы гиперповерхности.
14. Геодезические, их существование и единственность, экспоненциальное отображение, радиус инъективности, нормальные и полярные координаты.

15. Градиент и константа Липшица, функции дистанционного типа и их градиентные линии. Лемма Гаусса, геодезические и кратчайшие.
16. Полные римановы многообразия: метрическая и геодезическая полнота. Теорема Хопфа-Ринова, существование кратчайших, компактность шаров. Дифференцирование расстояния. Сопряженные точки.
17. Кривизна аффинной связности. Оператор кривизны и голономия. Плоские метрики и равенство нулю тензора кривизны. Симметрии тензора кривизны, тензор кривизны в двумерном случае.
18. Голономия границы области, формула Гаусса-Бонне. Кривизна и эйлерова характеристика поверхности. Метрики постоянной кривизны на поверхностях.
19. Секционные кривизны. Вид тензора кривизны при постоянной секционной кривизне. Кривизна подмногообразия. Вполне геодезические подмногообразия.
20. Геодезические вариации, поля Якоби, уравнение Якоби. Поля Якоби и сопряженные точки. Размерность 2: полугеодезические координаты, уравнение Якоби, его начальные данные для полярных координат.
21. Поверхности постоянной гауссовой кривизны: локальная изометричность, универсальное накрывающее.
22. Сравнение решений уравнения Якоби. Сравнение длин, площадей и углов при неравенствах на гауссову кривизну. Кривизна и диаметр.

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т., Современная геометрия: методы и приложения. В 3-х тт. 6-е издание. – М.:«Дрофа», 2013

3.4.2 Список дополнительной литературы

1. Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология: начальный курс. – М.: Мир, 1972
2. Постников М.М., Лекции по геометрии. Семестр III: Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987
3. Постников М.М., Лекции по геометрии. Семестр IV: Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1988
4. Постников М.М., Лекции по геометрии. Семестр V: Риманова геометрия. – М.: «Факториал», 1998

3.4.3 Перечень иных информационных источников

не предусмотрен

Раздел 4. Разработчики программы

Иванов Сергей Владимирович, доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН, главный научный сотрудник лаборатории геометрии и топологии ПОМИ РАН, svivanov@pdmi.ras.ru