1 Второе занятие

1.1 Разогрев

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две алгебры событий, такие что любые события $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$ независимы. Докажите, что вероятностное пространство можно представить в виде декартова произведения так, что события первой алгебры зависят только от первой координаты, а события второй алгебры — только от второй координаты.

1.2 Функция распределения и плотность случайной величины

1. Пусть F — функция распределения случайной величины. Докажите, что
$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big(F(x+a) - F(x)\big)\, dx = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

2. Пусть ξ — случайная величина, такая что для некоторых различных неотрицательных чисел a и b случайные величины $a\xi$ и $b\xi$ имеют одно и то же распределение. Докажите, что $\xi = 0$.

3. **Преобразование Смирнова.** Пусть X — случайная величина с непрерывной функцией распределения F_X. Как распределена случайная величина $F_X(X)$?

1.3 Векторнозначные случайные величины

1. Пусть X — случайные вектор с нулевым средним. Докажите, что для всякого детерминистического вектора v имеет место неравенство $\mathbb{E}\|X + v\| \geqslant \|v\|$.

2. Пусть Y — случайный вектор, v — детерминистический вектор, такой что $P(\|Y\| \geqslant \frac{1}{4}\|v\|) \leqslant \frac{1}{4}$. Докажите неравенство
$$\mathbb{E}\|Y + v\| \geqslant \mathbb{E}\|Y\| + \frac{1}{8}\|v\|.$$

1.4 Замечательные распределения

1. Плотность случайной величины ξ_λ задана формулой
$$f_{\xi_\lambda}(t) = \begin{cases} ce^{-\lambda t}, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Здесь $\lambda > 0$. Найдите константу c и вычислите вероятность события $1 \leqslant \xi_\lambda \leqslant 2$. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ_λ.

2. Найдите плотность квадрата случайной величины, равномерно распределённой на отрезке $[0, 1]$.

3. Пусть ξ — случайная величина, распределённая по закону $\mathcal{N}(a, \sigma)$. Вычислите распределение случайной величины $A\xi + B$.

1.5 Независимость случайных величин

1. (Упражнение) Случайные величины ξ, η независимы и имеют одинаковое экспоненциальное распределение. Докажите, что случайные величины $U = \min(\xi, \eta)$ и $\xi - \eta$ независимы.