

Второе занятие

1. Покажите, что пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.
2. Пусть для множества $X \subset \mathbb{R}^2$ величина $d(X) = \sup\{|x - y| : x, y \in X\}$ — его диаметр. Докажите, что для непустых $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство $d(X+Y) \leq d(X)+d(Y)$. Приведите пример, когда это неравенство строгое.
3. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — замкнутое ограниченное множество. Докажите, что $\sup X \in X$.
4. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$. а) Докажите, что если X — открытое, то $X + Y$ тоже открытое.
б) Верно ли, что если X, Y — замкнуты, то $X + Y$ тоже замкнуто?
5. Существует ли собственное подмножество множества вещественных чисел с пустой границей?
6. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется нигде не плотным, если внутренность его замыкания пуста. а) Покажите, что конечное объединение нигде не плотных множеств нигде не плотно. б) Верно ли, что объединение последовательности нигде не плотных множеств нигде не плотно?
7. Докажите, что граница замкнутого множества нигде не плотна. Верно ли то же для границы произвольного множества?
8. Пусть замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}$ таково, что для любых двух различных точек $x, y \in A$ найдется такая точка z строго между ними, что $z \in A$. Верно ли, что A — отрезок (или луч)?
9. Найдите множество предельных точек множества а) $\{m+n\sqrt{2}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$
б) $\{\sqrt{m} - \sqrt{n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$