

# 1 Третье занятие

1. Случайные величины  $\xi, \eta$  независимы и имеют одинаковое экспоненциальное распределение. Докажите, что случайные величины  $U = \min(\xi, \eta)$  и  $\xi - \eta$  независимы.
2. Два друга договорились встретиться в промежуток между двумя и тремя часами. Они приходят независимо в случайные моменты указанного промежутка. Пришедший ждет десять минут, и, если не встретит друга, расстраивается и уходит. Найдите вероятность того, что друзья встретятся.
3. Найдите плотность распределения случайной величины  $e^\xi$ , если  $\xi$  — а) стандартная нормальная б) экспоненциальная с интенсивностью один случайная величина.

4. Совместное распределение случайных величин  $(\xi, \eta)$  имеет плотность

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(x^2+y^2)^3}, & \text{при } x^2 + y^2 \geq 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Независимы ли  $\xi$  и  $\eta$ ? Найдите плотность распределения случайной величины  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ .

5. Случайные величины  $\xi_1, \xi_2$  независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найдите вероятность попадания случайной точки  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  в кольцо  $\{2 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3\}$ .
6. Пусть  $\xi, \eta$  — ограниченные случайные величины. Докажите, что если для всяких натуральных  $m$  и  $n$  выполнено равенство

$$\mathbb{E}\xi^m \eta^n = \mathbb{E}\xi^m \mathbb{E}\eta^n,$$

то  $\xi$  и  $\eta$  независимы.

7. Автобус номер 210 выезжает из Петергофа в случайное время, распределенное экспоненциально с интенсивностью один, начиная с 12 часов ночи. Вася пришел на остановку к 12 ночи. Каково распределение времени ожидания автобуса Васей при условии, что Вася ждет автобуса уже час?