

Пятое занятие

1. Пусть K — замкнутое подмножество прямой. Докажите, что существует непрерывная функция f , множество нулей которой есть в точности K .
2. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. При каких α верно следующее утверждение: для всякой функции $f \in C([0, 1])$, такой что $f(0) = f(1)$, найдётся $x \in [0, 1]$, такой что $f(x) = f(x + \alpha)$?
3. Докажите, что множество разрывов функции на отрезке есть объединение счётного семейства замкнутых множеств.
4. Найдите предел

$$\frac{\sum_{k \leq n} (k!)^{-\frac{\alpha}{k}}}{n^{1-\alpha}}, \quad \alpha < 1.$$