Шестое занятие

1. Пусть f — характеристическая функция некоторого распределения. Обязательно ли $|f|$ будет характеристической функцией распределения?

2. Являются ли следующие функции характеристическими?

   - $\cos|t| - \sin|t|$;
   - $\frac{1+\cos t}{2}$;
   - $\cos t^2$;
   - $\cos(\sin t)$.

3. Существуют ли характеристические функции с компактным носителем?

4. Пусть X и Y — две независимые случайные величины, распределённые по Коши. Как распределена величина $\frac{X+Y}{2}$?

5. Пусть случайные величины $N, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы, причём N принимает лишь натуральные значения, а величины X_j одинаково распределены. Выразите характеристическую функцию суммы случайного числа слагаемых

$$S = \sum_{j=1}^{N} X_j$$

   через характеристическую функцию X и производящую функцию N.

6. Случайные величины X и Y независимы, а X, Y и $X-Y$ одинаково распределены. Найдите распределение X.

7. Случайные величины $X \geqslant 0$ и $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ независимы, а их произведение имеет плотность $e^{-\frac{|x|}{2}}$. Найдите плотность X.

8. Для каких видов сходимости (почти наверно, по вероятности, в среднем и по распределению) сходимость по Чезаро следует из обычной сходимости?

9. Пусть X_j — последовательность независимых величин Бернулли с параметрами p_j. При каких условиях на p_j эта последовательность почти наверно сходится?

10. Пусть X_j — последовательность неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин, таких что их общая функция распределения удовлетворяет условию $1 - F(x) = o(x^{-2})$ при $x \to \infty$. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{j \leqslant n} X_j \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

11. Пусть X_j — последовательность одинаково распределённых случайных величин с конечным математическим ожиданием модуля. Пусть $\alpha > 0$, рассмотрим события

$$A_j = \{|X_j| \geqslant \alpha j\}.$$

Докажите, что $P(A_j \text{ беск. часто}) = 0$.