Шестое занятие, 07.10.17. Группа 101

1. Функция F непрерывна на $\mathbb{R}$ и $F(F(x)) = x$. Докажите, что есть точка c, такая что $F(c) = c$.

2. Функция F непрерывна на $\mathbb{R}$ и ограничена. Доказать, что для любого числа T найдется последовательность $x_n \to \infty$, такая что $F(x_n + T) - F(x_n) \to 0$.

3. Равномерно ли непрерывны указанные функции?

   - $\sin x^2, \quad x \in [1, \infty)$;
   - $\frac{1}{\pi - 2\arctan x}, \quad x \in [1, \infty)$;
   - $x \log x \quad x \in [0, 1]$.

4. Найдите наибольший показатель α, такой что функция f гёльдерова с показателем α, если

   - $f(x) = x^\beta, \quad x \in [0, 1]$;
   - $f(x) = x^\beta, \quad x \geqslant 0$;
   - $f(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1]$.

5. Докажите, что любую непрерывную функцию на отрезке можно приблизить липшицевой с любой степенью точности.

6. Бывают ли функции с показателем гёльдеровости больше единицы?

7. Вычислите $\sin' x$ по определению.

8. Продифференцировать функцию x^x.

9. Докажите, что отрезок касательной к параболе $y = x^2 + 1$, высекаемый параболой $y = x^2$, делится точкой касания пополам.

10. Найдите все дифференцируемые на $[0, 1]$ функции f, удовлетворяющие условию $f + f' = 0$.

11. Пусть K — замкнутое множество на прямой. Постройте дифференцируемую функцию, которая обращается в нуль ровно на K.