Восьмое занятие

1. Пусть X_j — последовательность неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин, таких что их общая функция распределения удовлетворяет условию $1 - F(x) = o(x^{-2})$ при $x \to \infty$. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{j \leqslant n} X_j \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

2. Пусть X_j — последовательность одинаково распределённых случайных величин с конечным математическим ожиданием модуля. Пусть $\alpha > 0$, рассмотрим события

$$A_j = \{|X_j| \geqslant \alpha j\}.$$

   Докажите, что $P(A_j \text{ беск. часто}) = 0$.

3. Докажите, что сходимость почти наверно не метризуема.

4. Пусть $\sum \mathbb{E}|\xi_j|^p < \infty$. Докажите, что $\xi \to 0$ почти наверно.

5. Пусть $X_n \Rightarrow X$ и $V_n \Rightarrow c$. Тогда $X_n V_n \Rightarrow cX$.

6. Пусть $\sum_j \xi_j r^j$ — случайный ряд с независимыми коэффициентами. Докажите, что его радиус сходимости константа (почти наверно).

7. В условии предыдущей задачи: если коэффициенты ещё и одинаково распределены, то радиус сходимости равен либо нулю, либо единице, в зависимости от конечности момента $\mathbb{E}\ln(1 + |\xi|)$.