Девятое занятие

1. Докажите, что сходимость почти наверно не метризуема.

2. Пусть $\sum \mathbb{E}|\xi_j|^p < \infty$. Докажите, что $\xi \to 0$ почти наверно.

3. Пусть $X_n \Rightarrow X$ и $V_n \Rightarrow c$. Тогда $X_n V_n \Rightarrow cX$.

4. Пусть $\sum_j \xi_j r^j$ — случайный ряд с независимыми коэффициентами. Докажите, что его радиус сходимости константа (почти наверно).

5. В условии предыдущей задачи: если коэффициенты ещё и одинаково распределены, то радиус сходимости равен либо нулю, либо единице, в зависимости от конечности момента $\mathbb{E}\ln(1+|\xi|)$.

6. Найдите предел
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]^n} \frac{\sum_{j\leqslant n} x_j^5}{\sum_{j\leqslant n} x_j^4}\,dx$$

7. Пусть случайные величины X_j независимы и имеют одинаковое распределение с конечной дисперсией. Докажите, что предел $\lim_n P(S_n \leqslant b)$ равен либо нулю, либо единице, либо половине; здесь $S_n = \sum_{j\leqslant n} X_j$.

8. Пусть величины X_j независимы и равномерно распределены на отрезках $[a_j-1, a_j+1]$ соответственно. Пусть $\sum_j |a_j| < \infty$. Найдите
$$\lim_{n\to\infty} P\Big(0 < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < 1\Big), \qquad S_n = \sum_{j=1}^n X_j.$$