

1 Первое занятие

1.1 Ограничность последовательностей и множеств

Определим сумму множеств по правилу

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Иными словами, множество $X + Y$ состоит из всевозможных сумм чисел x и y , таких что $x \in X$ и $y \in Y$. Аналогично, определим произведение множеств по правилу $X \cdot Y = \{xy: x \in X, y \in Y\}$.

1. Пусть X, Y — ограниченные множества. Докажите, что множества $X + Y, X \cdot Y$ тоже ограничены.
2. Ограничены ли следующие последовательности? Приведите доказательство (возможно, тут стоит напомнить о неравенстве Бернулли).

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \left\{ n^{\cos \alpha n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \left\{ n(\sqrt{n^4 + 1} - n^2) \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ & \left\{ n^{1-\cos(\frac{\pi}{n})} \mid n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

1.2 Супремум и инфимум

1. Пусть X — подмножество прямой. Верно ли неравенство $\inf X \leqslant \sup X$?
2. Приведите пример подмножества X прямой, такого что $\sup X \notin X$.
3. Вычислите супремум и инфимум следующих множеств

$$\begin{aligned} & \mathbb{N}; \\ & \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \\ & \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \\ & \left\{ \sin \alpha n \mid n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

4. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$. Докажите, что $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.
5. Пусть X, Y — подмножества множества положительных чисел. Докажите, что $\sup(X \cdot Y) = \sup(X) \sup(Y)$. Можно ли отказаться от условия положительности?

1.3 Открытость, замкнутость, предельные точки множеств

1. Докажите, что множество X содержит свои предельные точки тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{R} \setminus X$ открыто.
2. Докажите, что множество предельных точек любого множества или последовательности замкнуто.
3. Найдите все предельные точки множества квадратов рациональных чисел.
4. Пусть Y — множество предельных точек некоторого множества. Обязательно ли существует последовательность, для которой Y — множество предельных точек?
5. Сколько различных множеств можно получить из одного множества при помощи операций Cl и Int?