Первое занятие, 02.09.17

1. **Неравенство Бонферрони.** Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — события. Докажите неравенство
$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(E_i \cup E_j).$$

2. Из отрезка $[0,1]$ случайным образом выбирают число. Какова вероятность того, что в десятичной записи этого числа будет хотя бы один нуль?

3. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — события, такие что $\sum_j P(E_j) > n-1$. Докажите, что $P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) > 0$.

4. Определим функции ρ_1 и ρ_2, заданные на парах измеримых подмножеств вероятностного пространства, согласно формулам
$$\rho_1(A,B) = P(A\Delta B);$$
$$\rho_2(A,B) = \begin{cases} \frac{P(A\Delta B)}{P(A\cup B)}, & P(A\cup B) \neq 0; \\ 0, & P(A \cup B) = 0. \end{cases}$$
Символом Δ мы обозначили симметрическую разность двух множеств. а) Докажите, что ρ_1 и ρ_2 — метрики. б) Полны ли получившиеся метрические пространства?

5. В куб $[0,1]^n$ случайно брошена точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Вероятность того, что точка x принадлежит измеримому подмножеству куба, равна лебеговой мере этого подмножества. Найдите вероятности того, что а) $\max_j x_j < z$, б) $\min_j x_j < z$. в) Найдите предельное значение величины $P(n \cdot \min_j x_j < z)$ при $n \to \infty$.

6. Внутри правильного треугольника случайным образом выбрана точка. Какое событие более вероятно: точка ближе к центру треугольника, чем к какой либо его вершине, или наоборот?

7. Пусть точка x выбрана случайно на единичной сфере в пространстве $\mathbb{R}^{2d-1}$. Какова вероятность того, что $|x_1| > z$?

8. Пусть три точки A, B, C независимо выбраны на окружности. Независимы ли события “угол $\angle ABC$ острый” и “угол $\angle ACB$ острый”? С какой вероятностью треугольник ABC будет остроугольным? А прямоугольным?

9. На отрезок $[0,1]$ наудачу брошены три точки a, b, c. Найдите вероятность того, что из отрезков $[0,a]$, $[0,b]$ и $[0,c]$ можно составить треугольник.

10. Стержень сломан в двух случайно выбранных точках. Какова вероятность того, что из трех образованных отрезков можно сложить треугольник?