Листочек 1

1. (5) Пусть f — липшицева функция на прямой с нормой не более единицы (т.е. $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$). Докажите неравенство
$$\mathbb{D}f(\xi) \leqslant \mathbb{D}\xi.$$

2. (7) Покажите, что для любого n пуассоновская случайная величина может быть представлена в виде суммы n независимых пуассоновских случайных величин.

3. (7) В квадрат $[0,1]^2$ случайно бросили 4 точки. Какова вероятность того, что они находятся в выпуклом положении?

4. Точки X и Y выбраны случайно и независимо в квадрате $ABCD$. Независимы ли события
   (a) (5) Прямая XY пересекает отрезок AB и прямая XY пересекает отрезок AD?
   (b) (5) Прямая XY пересекает отрезок AB и прямая XY пересекает отрезок CD?

5. (10) Существует ли вероятностная мера μ на натуральном ряде, такая что события
$$E_p = p\mathbb{N}$$
независимы при взаимно простых p?

6. (10) Пусть X_1, X_2, X_3 — независимые случайные величины, распределённые экспоненциально с интенсивностью 1. Докажите, что случайные величины
$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}, \quad Y_2 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}, \quad Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$
независимы.

7. (12) Пусть X, Y, Z — независимые положительные случайные величины. Докажите, что для всякого числа $r > 0$ выполнено неравенство
$$P\Big(\frac{X}{Z} < r, \frac{Y}{Z} < r\Big) \geqslant P\Big(\frac{X}{Z} < r\Big)P\Big(\frac{Y}{Z} < r\Big).$$

8. (12) Пусть X — неотрицательная случайная величина. Докажите неравенство
$$\mathbb{E}X^4\mathbb{E}X^8 \leqslant \mathbb{E}X^3\mathbb{E}X^9.$$

9. Пусть X — неотрицательная случайная величина. Докажите, что каждое из свойств, перечисленных ниже, влечёт следующее.

   (a) Для всякого числа $u \in (0, \infty)$, функция
   $$x \mapsto P(X \leqslant x + u \mid X > x)$$
   не убывает на луче $(0, \infty)$.

   (b) (4) Функция $x \mapsto \mathbb{E}(X - x \mid X > x)$ не возрастает на луче $(0, \infty)$.

   (c) (1) Для всякого неотрицательного числа x имеет место неравенство $\mathbb{E}(X - x \mid X > x) \leqslant \mathbb{E}X$.

   (d) (10) Имеет место неравенство $\mathbb{D}X \leqslant (\mathbb{E}X)^2$.

10. (12) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть случайный вектор $X \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям

   (a) $\mathbb{E}X = 0$;

   (b) $\frac{\varepsilon}{100} \leqslant \|X\| \leqslant \varepsilon$ почти наверное;

   (c) Для всякого вектора $v \in S^{n-1}$ имеет место неравенство
   $$P\Big(\Big|\Big\langle \frac{X}{\|X\|}, v\Big\rangle\Big| < \frac{1}{2}\Big) > \frac{1}{5},$$
   т.е. вектор X не концентрируется в одном направлении.

   Докажите, что для достаточно малого δ имеет место неравенство
   $$\mathbb{E}\|X + v\| \geqslant 1 + \delta \mathbb{E}\|X\|^2, \quad \|v\| = 1,$$
   если число ε достаточно мало.