

## Листочек 1

Дедлайн 30.09.17

1. (4) Пусть  $P$  — некоторый многочлен с вещественными коэффициентами. Докажите, что, если множество  $\{P(x)\}_{x \in \mathbb{Z}}$  ограничено, то  $P$  — константа.
2. (5) Докажите, что число  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  иррационально.
3. (5) Докажите, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением  $x_{n+1} = x_n \sin(x_n)$  и произвольным начальным членом, сходится.
4. Докажите, что любое открытое множество на прямой есть
  - а) (4) не более чем счётное объединение открытых отрезков;
  - б) (7) не более чем счётное дизъюнктное объединение открытых отрезков и лучей.
5. (7) Какое наибольшее число различных подмножеств  $\mathbb{R}$  может иметь одну и ту же границу?
6. (10) Пусть последовательность  $x_n$  такова, что  $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ . Докажите, что множество предельных точек этой последовательности является отрезком, лучом или прямой.
7. (10) Для каждого  $a > 0$  определим последовательность рекуррентно:  $x_{n+1} = x_n^{x_n/n}$ ,  $x_1 = a$ . Докажите, что существует такое число  $b > 1$ , что построенная последовательность ограничена при  $a < b$  и не ограничена при  $a \geq b$ .
8. Можно ли на плоскости нарисовать несчётное множество непересекающихся букв а) (4) “Г” б) (8) “В” в) (12) “Т”?
9. Множество называется дискретным, если все его точки изолированные. а) (5) Докажите, что дискретное подмножество плоскости не более чем счетно, а его замыкание не может иметь внутренних точек.  
б) (6) Постройте пример дискретного подмножества плоскости, замыкание которого континуально.  
в) (7) Существует ли дискретное подмножество прямой, замыкание которого континуально?
10. (6) Докажите, что множество предельных точек последовательности  $\sin(n^3)$  бесконечно.