Листочек 2

Дедлайн 21.10.17

1. а) (6) Пусть последовательность $\{a_n\}$ субаддитивна, т.е. для всяких m и n имеет место неравенство $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$. Докажите, что $\{\frac{a_n}{n}\}_n$ имеет предел (возможно, бесконечный).

   б) (4) Пусть γ_n — число несамопересекающихся ломаных длины n на плоскости, выходящих из нуля и идущих по линиям клетчатой сетки. Докажите, что последовательность $\frac{\log \gamma_n}{n}$ имеет предел.

   в) (8) Обозначим предел, построенный в предыдущем пункте, символом γ. Докажите неравенства $\ln 2 < \gamma < \ln 3$.

2. Говорят, что последовательность $\{a_n\}_n$ сходится по Чезаро, если последовательность средних Чезаро $\{n^{-1}\sum_{j\leqslant n} a_j\}_n$ сходится. а) (4) Докажите, что если последовательность сходится в обычном смысле, то она сходится и по Чезаро; б) (1) Верно ли обратное утверждение?

3. Числовая последовательность $\{x_n\}_n$ задана рекуррентной формулой $x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2-1}$. Если в знаменателе получился нуль, все последующие члены последовательности равны ∞. а) (7) Найдите все начальные члены x_0, при которых $x_n \to 0$; б) (6) Найдите все возможные пределы $\{x_n\}_n$.

4. (12) Пусть $(x_j, y_j)_{j=1}^N$ — набор точек на плоскости, а (α, β) — ещё некоторая точка. При каких (α, β) сходится двойной ряд

$$\sum_{m,n\geqslant 0} \frac{m^\alpha n^\beta}{1 + \sum_{j=1}^N m^{x_j} n^{y_j}}?$$

5. а) (14) Пусть ряд $\sum_n |a_n|^p$ сходится при некотором $p > 1$. Докажите сходимость ряда $\sum_n |b_n|^p$, где b_n — средние Чезаро последовательности $\{a_n\}_n$.

   б) (6) Пусть ряд $\sum_n a_n$ сходится и $a_n \geqslant 0$. Верно ли, что ряд, составленный из членов $(\prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}}$ сходится?

6. (8) Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению $f(f(x)) = -x$. Докажите, что она имеет бесконечное число разрывов.

7. (5) Пусть f — непрерывная функция на прямой, такая что для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to \infty.$$

Докажите, что f линейна.

8. (10) Непрерывная функция f на $[0, \infty)$ такова, что для всякого положительного x существует предел $\lim_{n\to\infty} f(nx)$. Докажите существование предела f на бесконечности.

9. (4) Пусть S — подмножество $\mathbb{R}$, а f — один-липшицева функция на S; то есть, для всяких $x, y \in S$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

Докажите, что существует один-липшицева функция $\tilde{f}$ на всей прямой, которая продолжает f, то есть $\tilde{f}|_S = f$.

10. (5) Последовательность x_n задана рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n + \frac{1}{x_n^2}}$$

и начальным членом $x_1 = 1$. Найдите асимптотику последовательности x_n при n стремящемся к бесконечности (укажите явно эквивалентную последовательность).