Листочек 2

1. (6) Докажите, что существует матрица размера 11×11, все элементы которой суть ± 1, такая что её определитель хотя бы 4000.

2. (10) Пусть X и Y — случайные матрицы, такие что матрица $\mathbb{E}YY^*$ обратима. Докажите неравенство

$$\mathbb{E}XY^*(\mathbb{E}YY^*)^{-1}\mathbb{E}YX^* \leqslant_{\mathrm{pd}} \mathbb{E}XX^*,$$

где $A \leqslant_{\mathrm{pd}} B$ означает, что матрица $B - A$ неотрицательно определена.

3. (14) Пусть функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

   (a) Функция φ чётна;

   (b) $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$;

   (c) Функция φ выпукла на $(0, \infty)$.

   Докажите, что φ — характеристическая функция некоторого распределения.

4. (14) Пусть случайный вектор X в $\mathbb{R}^2$ таков, что для всякого детерминированного вектора $v \in \mathbb{R}^2$ величины $\langle X, v\rangle$ и $\langle X, v^{\perp}\rangle$ независимы. Докажите, что X — гауссовский вектор (или тождественный).

5. а) (4) Пусть случайная величина X такова, что $|X| \leqslant 1$ почти наверное, и $\mathbb{E}X = 0$. Докажите, что $\mathbb{E}e^X \leqslant e^{\mathbb{E}X^2}$.

   б) (4) Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, и случайная величина X такова, что $X \in [a, b]$ почти наверное, $\mathbb{E}X = 0$. Докажите, что

$$\mathbb{E}e^X \leqslant e^{(b-a)^2/8}.$$

   в) (6) Пусть случайные величины X_j независимы в совокупности. Пусть также $a_i \leqslant X_i \leqslant b_i$. Докажите неравенство

$$P\Big(|X - \mathbb{E}X| \geqslant \lambda\big(\sum_{j=1}^{n}|a_j - b_j|^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big) \leqslant 2e^{-2\lambda^2}, \qquad \text{где } X = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

   г) (10) Пусть $\{\xi_j\}_j$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Докажите, что для всякого $p > 0$ найдётся константа C, такая что для всякой последовательности $\{a_j\}_j$, выполнено неравенство

$$C^{-1}\Big(\sum_j a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\mathbb{E}\Big|\sum_j a_j\xi_j\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\Big(\sum_j a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

6. (6) Пусть X_j — гауссовские случайные величины, такие что X_j почти наверно сходится к X. Докажите, что $X_j \xrightarrow{L_2} X$.

7. (6) Пусть X_j — последовательность независимых случайных величин, сходящихся по вероятности к величине X. Докажите, что X постоянна.

8. (4) Пусть последовательность событий A_i такова, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(A_i \cap A_j)}{(\sum_{i=1}^n p(A_i))^2} = 1, \qquad \sum_{i=1}^\infty p(A_i) = +\infty.$$

   Докажите, что почти наверное выполнено бесконечное количество событий A_i.

9. (8) Вычислите главный член асимптотики среднего значения функции $|\cdot|$ по единичному кубу в $\mathbb{R}^n$, когда $n \to \infty$.

10. (8) Пусть ξ_n — последовательность неотрицательных нетривиальных независимых одинаково распределенных случайных величин, таких что $\mathbb{E}\xi_i = 1$. Докажите, что последовательность $\prod_{i=1}^n \xi_i$ сходится к нулю почти наверное.