Листочек 3

1. (6) Пусть последовательности $\{X_j\}$ и $\{Y_j\}$ сходятся по вероятности к случайным величинам X и Y соответственно. Пусть φ — непрерывная функция двух переменных. Докажите, что
$$\varphi(X_j, Y_j) \xrightarrow{P} \varphi(X, Y).$$

2. (8) Докажите, что для любого тригонометрического полинома $\sum_n c_n e^{inx}$ можно указать числа $\varepsilon_n = \pm 1$, такие что
$$\int\limits_0^{2\pi} \Big| \sum_n \varepsilon_n c_n e^{inx} \Big| \, dx \geqslant c \Big(\sum_n |c_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$
где $c > 0$ — некоторая абсолютная постоянная.

3. (9) Пусть A_j — независимые события, такие что $\sum_j P(A_j) = \infty$. Докажите, что
$$\frac{S_n}{\mathbb{E} S_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1,$$
где $S_n = \sum_{j \leqslant n} \chi_{A_j}$.

4. (6) Пусть величина ξ имеет плотность $p_\xi(x) = |x| \chi_{[-1,1]}(x)$. Докажите, что её нельзя представить в виде суммы двух независимых одинаково распределённых величин.

5. Пусть число N достаточно велико. Покрасим числа от 1 до N в два цвета (красный и синий) независимо и равновероятно. Докажите, что с вероятностью хотя бы 0.9 выполнены следующие утверждения
   (a) (10) Есть красный отрезок арифметической прогрессии длины хотя бы $0.1 \log N$;
   (b) (10) Нет одноцветного отрезка арифметической прогрессии длины более $10 \log N$.

6. (4) Пусть $\{\xi_j\}_j$ — последовательность центрированных случайных величин с конечными равномерно ограниченными дисперсиями, такая что $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \to 0$ при $|i - j| \to \infty$. Докажите, что для этой последовательности выполнен закон больших чисел, то есть,
$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \xrightarrow{P} 0.$$

7. Пусть $\{X_j\}$ — последовательность одинаково распределённых по Коши независимых случайных величин.

   (a) (6) Докажите, что последовательность величин $Y_n = \frac{1}{n}\max_{i\leqslant n} X_n$ сходится по распределению и найдите распределение её предела.

   (b) (8) Докажите, что $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j\leqslant n} X_j = \infty$ почти наверное.

   (c) (12) Докажите, что при всяком $\alpha > 1$ равенство

   $$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{j\leqslant n} X_j = 0$$

   имеет место почти наверное.

8. (7) Пусть $X^n = (X_1^n, X_2^n, \ldots, X_{n+1}^n)$ — случайный вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$, равномерно распределённый на единичной сфере. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}X_{n+1}^n \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

9. (7) Пусть ряд $\sum\frac{\mathbb{E}|X_j|}{j}$ сходится. Докажите, что $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j \to 0$ п.н..

10. (7) Говорят, что случайная величина X субгауссова, если

$$P(|X| > t) \leqslant Ce^{-ct^2}$$

для некоторых положительных констант C и c. Пусть X_n — последовательность равномерно субгауссовых случайных величин и величина X — тоже субгауссова. Докажите, что сходимость X_n к X по распределению равносильна тому, что для всякого $k \in \mathbb{Z}_+$ имеет место сходимость $\mathbb{E}X_n^k \to \mathbb{E}X^k$.