Десятое занятие

1. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения F_ξ. Докажите, что
$$\mathbb{E}(\xi \mid a \leqslant \xi < b) = \frac{\int_a^b x\, dF_\xi(x)}{F_\xi(b) - F_\xi(a)}.$$

2. Пусть $S_1 \subset S_2$ — две алгебры множеств. Докажите, что $\mathbb{E}(\xi \mid S_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi \mid S_1) \mid S_2)$.

3. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределён в треугольнике с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,2)$. Найдите $\mathbb{E}(X \mid Y)$ и $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

4. Пусть X и Y — независимые равномерно распределённые на отрезке $[0,1]$ случайные величины. Найдите $\mathbb{E}(X + Y \mid X - Y)$.

5. Пусть X и Y — независимые одинаково распределённые случайные величины. Найдите $\mathbb{E}(X \mid X + Y)$.

6. Пусть $\{X_j\}_j$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $\{S_j\}_j$ — последовательность соответствующих частичных сумм. Найдите
$$\mathbb{E}(X_j \mid S_n, S_{n+1}, \ldots)$$
при всяких j, n.

7. Пусть G — выпуклая функция. Докажите, что
$$G(\mathbb{E}(\xi \mid S)) \leqslant \mathbb{E}(G(\xi) \mid S)$$
а) для случая, когда S — конечная алгебра б) для случая, когда S — произвольная сигма-алгебра.