Одиннадцатое занятие

1. Пусть f — суммируемая функция на отрезке и $\mathcal{S} = \{S_n\}$ — фильтрация, порождающая борелевскую алгебру. Докажите, что а) последовательность $\{\mathbb{E}(f \mid S_n)\}_n$ — является мартингалом; б) $\mathbb{E}(f \mid S_n) \to f$ в L^1 и почти всюду.

2. Пусть G — выпуклая функция. Докажите, что
$$G(\mathbb{E}(\xi \mid S)) \leqslant \mathbb{E}(G(\xi) \mid S)$$
а) для случая, когда S — конечная алгебра б) для случая, когда S — произвольная сигма-алгебра.

3. Пусть $\{X_j\}$ — последовательность независимых случайных величин с конечными $\mathbb{E}|X_j|$ и $\mathbb{E}X_j = 0$. Пусть k — фиксированное натуральное число. Докажите, что последовательность
$$Y_n = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant n} X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_k}$$
образует мартингал относительно фильтрации, задаваемой последовательностью X_j.

4. Пусть $\{f_n, S_n\}$ — мартингал, а $\{\alpha_n\}$ — равномерно ограниченная предсказуемая последовательность случайных величин, то есть каждая α_n измерима относительно сигма-алгебры S_{n-1}. а) Докажите, что
$$\Big\{ \sum_{j \leqslant n} a_j (f_j - f_{j-1}) \Big\}_n$$
тоже мартингал. б) Докажите, что его L^2 норма оценивается через L^2 — норму f.