Одиннадцатое занятие

1. Пусть X и Y — независимые равномерно распределённые на отрезке $[0,1]$ случайные величины. Найдите $\mathbb{E}(X+Y \mid X-Y)$.

2. Пусть X и Y — независимые одинаково распределённые случайные величины. Найдите $\mathbb{E}(X \mid X+Y)$.

3. Пусть $\{X_j\}_j$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $\{S_j\}_j$ — последовательность соответствующих частичных сумм. Найдите

$$\mathbb{E}(X_j \mid S_n, S_{n+1}, \ldots)$$

при всяких j, n.

4. Пусть G — выпуклая функция. Докажите, что

$$G(\mathbb{E}(\xi \mid S)) \leqslant \mathbb{E}(G(\xi) \mid S)$$

а) для случая, когда S — конечная алгебра б) для случая, когда S — произвольная сигма-алгебра.

5. Пусть f — случайная величина с конечным математическим ожиданием, а S — фильтрация. Докажите, что $\{\mathbb{E}(f \mid S_n)\}_n$ — мартингал.

6. Пусть $\{f_n\}$ — мартингал. Докажите, что

$$\Big\{ \sum_{j \leqslant n} (-1)^j (f_j - f_{j-1}) \Big\}_n$$

тоже мартингал. Докажите, что его L_2 норма не превосходит L_2 — норму f.

7. Пусть f — суммируемая функция на отрезке и S — фильтрация из конечных алгебр, порождающая борелевскую алгебру. Докажите, что $\mathbb{E}(f \mid S_n) \to f$ почти всюду.