Двенадцатое занятие

1. Пусть $\{X_j\}_j$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $\{S_j\}_j$ — последовательность соответствующих частичных сумм. Найдите
$$\mathbb{E}(X_j \mid S_n, S_{n+1}, \ldots)$$
при всяких j, n.

2. Пусть G — выпуклая функция. Докажите, что
$$G(\mathbb{E}(\xi \mid S)) \leqslant \mathbb{E}(G(\xi) \mid S)$$
для случая, когда S — произвольная сигма-алгебра.

3. Пусть f — случайная величина с конечным математическим ожиданием, а S — фильтрация. Докажите, что $\{\mathbb{E}(f \mid S_n)\}_n$ — мартингал.

4. Пусть $\{f_n\}$ — мартингал. Докажите, что
$$\Big\{\sum_{j\leqslant n}(-1)^j(f_j - f_{j-1})\Big\}_n$$
тоже мартингал. Докажите, что его L_2 норма не превосходит L_2 — норму f.

5. Пусть f — суммируемая функция на отрезке и S — фильтрация из конечных алгебр, порождающая борелевскую алгебру. Докажите, что $\mathbb{E}(f \mid S_n) \to f$ почти всюду.

6. Определение субмартингала ($\mathbb{E}(X_{n+1} \mid F_n) \geqslant X_n$). Поймите, что, если G — выпуклая, $(X_n, F_n))$ — мартингал и $\mathbb{E}G(X_n) < \infty$, то $(G(X_n), F_n)$ — субмартингал.

7. Пусть ξ_n — последовательность независимых случайных величин, т.ч. $\mathbb{P}(\xi_n = 0) = \mathbb{P}(\xi_n = 2) = \frac{1}{2}$. Пусть $X_n = \prod_{j=1}^n \xi_j$. Покажите, что $\{X_n\}$ — мартингал, не представимый в виде $\mathbb{E}(f \mid F_n)$ ни для какой суммируемой функции f.

8. Пусть τ — момент остановки. Будут ли $\tau - 1$ и $\tau + 1$ моментами остановки? Будет ли $\min(\tau, n)$ моментом остановки?

9. а) Пусть (X, S) — (суб)мартингал, а τ — момент остановки. Докажите, что $(X_{\min(\tau,n)}, S_n)$ — тоже (суб)мартингал. б) Верно ли, что $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_1$?

10. Докажите, что норма в L_p остановленного мартингала не превосходит L_p норму исходного.