

## Двенадцатое занятие

Старые задачи

1. Найдите первые несколько членов асимптотики  $y(x)$  в окрестности точки  $x_0$ , если:

- $e^y = y + \frac{y^2}{2} + x^3$  в окрестности точки  $x_0 = 1$ ,  $y(0) = 0$ ;
- $\sinh y = \cosh x$  в окрестности точки  $x = +\infty$ .

2. Вычислите первообразные.

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}; \\ & \int \arctan x \, dx; \\ & \int \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx; \\ & \int \sqrt{x - x^2} \, dx; \\ & \int x \sqrt{1 + x} \, dx. \end{aligned}$$

3. Вычислите интеграл  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} \, dx$ .

4. Вычислите производные следующих функций параметра  $x$ .

$$\begin{aligned} & \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} \, dt; \\ & \int_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3 \, dt. \end{aligned}$$

5. Пусть  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  есть монотонная ограниченная функция. Докажите, что

$$\left| \int_0^1 f(x) \, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

6. Вычислите интегралы

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} dx, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$\int_{-1}^1 \sin x^3 dx.$$