Тринадцатое занятие

1. Пусть G — выпуклая функция. Докажите, что
$$G(\mathbb{E}(\xi \mid S)) \leqslant \mathbb{E}(G(\xi) \mid S)$$
для случая, когда S — произвольная сигма-алгебра.

2. Пусть f — суммируемая функция на отрезке и S — фильтрация из конечных алгебр, порождающая борелевскую алгебру. Докажите, что $\mathbb{E}(f \mid S_n) \to f$ почти всюду.

3. Определение субмартингала ($\mathbb{E}(X_{n+1} \mid F_n) \geqslant X_n$). Поймите, что, если G — выпуклая, $(X_n, F_n))$ — мартингал и $\mathbb{E}G(X_n) < \infty$, то $(G(X_n), F_n)$ — субмартингал.

4. Пусть ξ_n — последовательность независимых случайных величин, т.ч. $\mathbb{P}(\xi_n = 0) = \mathbb{P}(\xi_n = 2) = \frac{1}{2}$. Пусть $X_n = \prod_{j=1}^{n} \xi_j$. Покажите, что $\{X_n\}$ — мартингал, не представимый в виде $\mathbb{E}(f \mid F_n)$ ни для какой суммируемой функции f.

5. Пусть τ — момент остановки. Будут ли $\tau - 1$ и $\tau + 1$ моментами остановки? Будет ли $\min(\tau, n)$ моментом остановки?

6. а) Пусть (X, S) — (суб)мартингал, а τ — момент остановки. Докажите, что $(X_{\min(\tau,n)}, S_n)$ — тоже (суб)мартингал. б) Верно ли, что $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_1$?

7. Докажите, что норма в L_p остановленного мартингала не превосходит L_p норму исходного.

8. Пусть (X, S) — субмартингал. Докажите, что существует мартингал (M, S) и почти наверное неубывающий предсказуемый процесс (A, S), такие что $X = M + S$ и $A_0 = 0$. Единственно ли такое разложение?

9. Пусть $X = (X_n)$ — мартингал, и τ — момент остановки. Пусть $\mathbb{E}\tau < \infty$, и для некоторой константы C для любого n выполнено неравенство
$$\mathbb{E}(|X_{n+1} - X_n| \mid X_1, \ldots, X_n) \leqslant C.$$
Докажите, что $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_1$.

10. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в множестве $\{k \in \mathbb{Z}\colon k \geqslant -1\}$. Пусть $\mu = \mathbb{E}X_1 < 0$. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, и $\tau = \inf\{n\colon S_n = -1\}$. Докажите, что τ конечно почти наверное и найдите $\mathbb{E}\tau$.

11. (Неравенство Азума) Пусть X_n — мартингал, и $|X_{n+1} - X_n| \leqslant c_n$ почти наверное. Тогда для любого N и любого $t > 0$ выполнено неравенство
$$\mathbb{P}(X_N - X_0 \geqslant t) \leqslant \exp\Big(-\frac{t^2}{2(c_1^2 + \cdots + c_N^2)}\Big).$$