Листочек 4

1. Пусть случайные величины ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, независимы и имеют одинаковое а)(4) равномерное на $[0,1]$ б)(4) экспоненциальное с параметром 1 распределение. Найдите

$$\mathbb{E}(\xi_1 \mid \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)) \quad \text{и} \quad \mathbb{E}(\xi_1 \mid \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)).$$

2. (8) Докажите, что если $\mathbb{E}(X \mid Y) \geqslant Y$ и $\mathbb{E}(Y \mid X) \geqslant X$, то $X = Y$ почти наверное.

3. (6) Пусть $\{X_j\}_j$ — последовательность независимых случайных величин, распределённых по закону $\mathcal{N}(0,1)$, пусть $\{S_n\}_n$ — последовательность соответствующих частичных сумм. Докажите, что последовательность

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} e^{\frac{S_n^2}{2(n+1)}}$$

является мартингалом относительно естественной фильтрации последовательности $\{X_j\}_j$.

4. (8) Пусть $\{S_n\}_n$ — простое случайное блуждание на прямой, то есть,

$$S_n = \sum_{j \leqslant n} \xi_j,$$

где ξ_j — независимые случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью $1/2$. Определим момент остановки τ как первый момент n, когда либо $S_n = a$, либо $S_n = b$ (здесь $a < 0 < b$ — целые числа). Докажите, что τ почти наверно конечно и найдите $\mathbb{E}S_\tau$.

5. (10) Докажите, что существует такая константа C, что неравенство

$$\sum_n 2^{-n} (\mathbb{E}G_n(G_{n+1} - G_n))^{\frac{1}{2}} \leqslant C \sup_n \mathbb{E}G_n$$

верно для всякого диадического неотрицательного субмартингала $G = \{G_n\}_n$.

6. (10) Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ имеет вид

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \cup_{j \geqslant 1}^N (\Omega_j),$$

здесь Ω_j — строго выпуклые компактные множества, причём множества Ω_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, дизъюнктны и все содержатся во внутренности Ω_0. Докажите, что для всякой точки $x \in \Omega$, существует дискретный мартингал (X, S), стартующий с точки x и почти наверное выходящий на границу Ω_0, не покидая множества Ω в том смысле, что для всякого атома $w \in S_n$ выпуклая оболочка множества значений X_{n+1} на атоме w лежит в Ω.

7. (10) Рассмотрим тригонометрический ряд $f(x) = \sum_{j \geqslant 0} a_j \cos 2^j x$ и его частичные суммы $f_n(x) = \sum_{j \leqslant n} a_j \cos 2^j x$ и соответствующую максимальную функцию

$$f^*(x) = \sup_n |f_n(x)|.$$

Докажите, что для всякого $p > 1$ существует такая константа c_p, что $\|f^*\|_{L_p} \leqslant c_p \|f\|_{L_p}$ вне зависимости от f.

8. (12) Докажите, что любой L_1 мартингал есть разность неотрицательных мартингалов.

9. (10) Пусть две вероятностные меры в $\mathbb{R}^d$ одинаково измеряют открытые шары. Следует ли из этого, что эти меры совпадают?

10. Случайным блужданием на решётке $\mathbb{Z}^d$ назовём процесс, который из вершины S_n с вероятностью $(2d)^{-1}$ переходит в одну из соседних вершин S_{n+1} (все переходы независимы). Пусть также S_0 есть начало координат. а)(10) Докажите, что случайное блуждание на плоскости посетит начало координат бесконечно часто. б)(8) Докажите, что случайное блуждание в пространстве почти наверно в начало координат не вернётся.