Листочек 4

Дедлайн 09.12.17

1. Пусть f — функция на прямой. Определим функцию f^* по правилу

$$f^*(\zeta) = \sup_x \big(\zeta x - f(x)\big).$$

   (a) (2) Докажите, что f^* — выпуклая функция;

   (b) (6) Докажите, что для выпуклой функции f имеет место равенство $f = f^{**}$;

   (c) (8) Пусть f — строго выпуклая функция и пусть f дифференцируема в окрестности точки x_0. Докажите, что f^* дифференцируема в точке $f'(x_0)$ и $(f^*)'(f'(x_0)) = x_0$.

2. Пусть $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(y)\,dy}{y} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(y)\,dy}{y} \right).$$

   (a) (4) Докажите, что указанный предел существует, если функция f гёльдерова с некоторым положительным показателем;

   (b) (4) Докажите, что указанный предел может не существовать, если f просто непрерывна.

3. а) (4) Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$. Докажите, что существует константа C, такая что

$$\left| \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt \right| \leqslant C(1+\lambda)^{-1}, \qquad \lambda > 0.$$

   б)(14) Пусть f — трижды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$. Докажите, что существует константа C, такая что

$$\left| \int_a^b f(t)\cos(\lambda t^2)\,dt \right| \leqslant C(1+\lambda)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \lambda > 0.$$

4. (4) Символом a_n обозначим число цифр, не меньших пяти, числа 2^n. Вычислите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

5. (4) Пусть f — выпуклая функция на положительной полуоси. Докажите, что $s \mapsto sf(s^{-1})$ — тоже выпуклая функция.

6. (6) Пусть g — трижды дифференцируемая функция на $(0, +\infty)$, такая, что $g(x) > 0, g'(x) > 0$ и $g''(x) > 0$ при $x > 0$, а также

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)g'''(x)}{(g''(x))^2} = c, \qquad c \neq 1.$$

Докажите, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = \frac{1}{2-c}.$$

7. (8) Пусть функция w задана неявным уравнением $w(z)e^{w(z)} = z$. Найдите первые три члена асимптотики функции w на бесконечности.

8. а) (6) Пусть функции f_n непрерывны и неотрицательны на $[0, 1]$. Пусть $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (поточечный предел) — тоже непрерывная на $[0, 1]$ функция. Докажите, что сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерна на $[0, 1]$.

   б) (6) Пусть последовательность монотонных на отрезке $[0, 1]$ функций g_n сходится поточечно к некоторой непрерывной функции g. Докажите, что сходимость равномерна.

9. (6) Функция $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть $(f'(0))^2 + f(0)^2 = 4$. Докажите, что найдется $x \in \mathbb{R}$, для которого $f(x) + f''(x) = 0$.

10. а) (4) Для $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 1]$ найдите сумму $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

    б) (6) Для $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 1]$ докажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}.$$

    в) (8) Пусть $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Для натурального n определим многочлен $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$. Докажите, что, если функция f непрерывна на $[0, 1]$, то последовательность B_n сходится к f равномерно на $[0, 1]$.