**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я  П Р О Г Р А М М А**
**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Математическая логика
Mathematical Logic

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 6

Регистрационный номер рабочей программы: 053444

## Раздел 1. Характеристики учебных занятий

### 1.1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений о математической логике в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов математической логики.

### 1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Владение курсом «Основные понятия наивной теории множеств».

### 1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: пропозициональная логика, ординалы и кардиналы, логика первого порядка, формальная арифметика и теоремы Гёделя о неполноте; уяснить логику и технику построения математической теории как фундамента самостоятельных научных исследований.

### 1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

Практические занятия 30 часов, промежуточная аттестация (зачеты и экзамены) 4 часа.

## Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий
## 2.1. Организация учебных занятий

### 2.1.1 Основной курс

| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| | лекции | семинары | консультации | практические занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии преподавателя | сам. раб. с использованием методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация (сам.раб.) | | |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| очная форма обучения | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 2 | 32 | | | 16 | | | | | 2 | | | | 56 | | 2 | | 18 | 3 |
| | 2-50 | | | 10-25 | | | | | 2-50 | | | | 1-1 | | 1-1 | | | |
| Семестр 5 | 32 | | 2 | 14 | | | | | 2 | | | | 27 | | 31 | | 16 | 3 |
| | 2-50 | | 2-50 | 10-25 | | | | | 2-50 | | | | 1-1 | | 1-1 | | | |
| ИТОГО | 64 | | 2 | 30 | | | | | 4 | | | | 83 | | 33 | | 34 | 6 |

| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| | Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| очная форма обучения | | | | | | |
| Семестр 2 | | | зачёт, по результатам работы за период обучения | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации | | |
| Семестр 5 | | | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации | | |

### 2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): **Семестр 2**

| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
|---|---|---|---|
| 1 | Пропозициональная логика | Лекции | 24 |
| | | практические занятия | 10 |
| | | в присутствии преподавателя | |
| | | по методическим материалам | 46 |
| 2 | Ординалы и кардиналы | Лекции | 8 |
| | | практические занятия | 4 |
| | | в присутствии преподавателя | |
| | | по методическим материалам | 16 |
| 3 | Зачет | промежуточная аттестация (ауд) | 2 |
| 5 | Экзамен | промежуточная аттестация (ауд) | 2 |
| | | промежуточная аттестация (с.р.) | 30 |

**Раздел 1:** *Пропозициональная логика*

1. Примеры проблем в основаниях математики: об аксиоматическом построении элементарной геометрии и роли пятого постулата Евклида, о парадоксах наивной теории множеств и семантических парадоксах, о формализме Гильберта и интуиционизме Брауэра.

2. Буквы и слова. Язык пропозициональной классической логики (**PCL**).

3. Представление о логическом исчислении. Гильбертовское исчисление для **PCL** и теорема дедукции для него.

4. Допустимые правила вывода для **PCL**. Основные примеры такого рода правил.

5. Логическая эквивалентность над **PCL**. Основные примеры такого рода эквивалентностей.

6. Нормальные формы (конъюнктивные и дизъюнктивные, обычные и совершенные). Теоремы о приведении формул языка **PCL** к нормальным формам.

7. Оценочная семантика для **PCL**. Таблицы истинности. Теорема о функциональной полноте логических связок для **PCL**.

7. Теоремы о корректности и сильной полноте для **PCL**. Алгоритмическая разрешимость **PCL** в качестве следствия.

8. Представление о других основных видах исчислений: исчисление естественного вывода, секвенциальное исчисление и табличное исчисление.

9. Критика закона исключённого третьего и парадоксы материальной импликации. Гильбертовское исчисление для пропозициональной интуиционистской логики (**PIL**) и теорема дедукции для него.

10. Семантика возможных миров для **PIL**. Теоремы о корректности и сильной полноте для **PIL**.

11. Финитная аппроксимируемость **PIL**. Алгоритмическая разрешимость **PIL** в качестве следствия.

12. Полнота по Посту и структурная полнота.

**Раздел 2:** *Ординалы и кардиналы*

1. Об аксиоматической теории множеств Цермело–Френкеля и аксиоме выбора.

2. Ординалы. Теорема о представлении вполне упорядоченных множеств.

3. Кардиналы. Теорема о существовании и единственности кардинала, равномощного данному множеству. Характеризация конечных и бесконечных множеств посредством кардиналов.

4. Базовые операции над ординалами и кардиналами.

Период обучения (модуль): **Семестр 5**

| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
|---|---|---|---|
| 1 | Логика первого порядка | Лекции | 18 |
| | | практические занятия | 8 |
| | | в присутствии преподавателя | |
| | | по методическим материалам | 32 |
| 2 | Формальная арифметика и теоремы Гёделя о неполноте. | Лекции | 14 |
| | | практические занятия | 6 |
| | | в присутствии преподавателя | |
| | | по методическим материалам | 30 |
| 3 | Зачет | промежуточная аттестация (ауд) | 2 |
| 5 | Экзамен | промежуточная аттестация (ауд) | 2 |
| | | промежуточная аттестация (с.р.) | 30 |

**Раздел 1:** *Логика первого порядка*

1. Язык классической логики первого порядка (**FOCL**).

2. Гильбертовское исчисление для **FOCL** и теорема дедукции для него.

3. Допустимые правила вывода для **FOCL**. Основные примеры такого рода правил.

4. Логическая эквивалентность над **FOCL**. Основные примеры такого рода эквивалентностей.

5. Предварённые нормальные формы. Теорема о приведении формул языка **FOCL** к предварённым нормальным формам.

6. Теоретико-модельная семантика для **FOCL**. Теорема о корректности для **FOCL**.

7. Теорема о сильной полноте для **FOCL**.

8. Теорема компактности Гёделя–Мальцева. Примеры свойств, не аксиоматизируемых в **FOCL (**из области теории групп).

9. Теоремы Лёвенгейма–Сколема «вниз» и «вверх».

**Раздел 2:** *Формальная арифметика и теоремы Гёделя о неполноте*

1. Арифметика Робинсона (**Q**) и арифметика Пеано (**PA**). Представимость вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств в **Q** (схема доказательства).

2. Теорема Матиясевича о диофантовости вычислимо перечислимых множеств (без доказательства). Определимость и метод автоморфизмов.

3. Лемма о диагонализации. Первая теорема Гёделя о неполноте.

4. Теорема Чёрча о неразрешимости **FOCL**. Теорема Тарского о неопределимости истинности.

5. Краткий обзор результатов о разрешимости и неразрешимости элементарных теорий различных естественных классов структур (групп, полей, графов, решёток и так далее).

6. Предикаты доказуемости. Вторая теорема Гёделя о неполноте.

7. Краткий обзор интуиционистской логики первого порядка и математики: о (неформальной) интерпретации Брауэра–Гейтинга–Колмогорова и «конструктивных контрпримерах», о реализуемости по Клини и марковском конструктивизме.

## Раздел 3. Обеспечение учебных занятий
### 3.1. Методическое обеспечение
#### 3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и практических занятий

#### 3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

#### 3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

**Методика проведения зачета**
Зачет проводится в устной форме. Для получения зачета необходимо решить 60% задач, предлагаемых в течение семестра. В случае, если к моменту проведения зачета студент решил меньшее количество задач, на зачете ему предлагаются задачи аналогичные по тематике и сложности. Задачи даются в форме домашних заданий с устной сдачей («листочки»), письменных домашних заданий и контрольных. Темы задач фиксированы, количество и форма выдачи остается на усмотрение преподавателя практических занятий. Возможна выдача задач повышенной сложности, решение которых засчитывается в качестве индивидуальных достижений студента (при подаче заявок на именные стипендии, конкурсы и т.п.); сдача таких заданий проводится в устной форме.

**Методика проведения экзамена**
Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.
Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.
Критерии выставления оценок
Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.
Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).
Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.
Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

#### 3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): **Семестр 2**

Темы **задач**:

1. Гильбертовское исчисление для **PCL**. Допустимые правила вывода для **PCL**. Логическая эквивалентность над **PCL**. Теорема о полноте для **PCL**.

2. Нормальные формы (конъюнктивные и дизъюнктивные, обычные и совершенные). Приведение формул языка **PCL** к нормальным формам.

3. Гильбертовское исчисление для **PIL**. Теорема о полноте для **PIL**.

4. Функциональная полнота. Полнота по Посту. Структурная полнота.

5. Ординалы и кардиналы. Основные свойства ординалов и кардиналов. Базовые операции над ординалами и кардиналами.

**Список вопросов к экзамену:**

1. Парадоксы наивной теории множеств и семантические парадоксы.
2. Буквы и слова. Язык пропозициональной классической логики (**PCL**).
3. Представление о логическом исчислении. Гильбертовское исчисление для **PCL** и теорема дедукции для него.
4. Допустимые правила вывода для **PCL**. Примеры.
5. Логическая эквивалентность над **PCL**. Примеры.
6. Нормальные формы (конъюнктивные и дизъюнктивные, обычные и совершенные). Теоремы о приведении формул языка **PCL** к нормальным формам.
7. Оценочная семантика для **PCL**. Таблицы истинности. Теорема о функциональной полноте логических связок для **PCL**.
7. Теоремы о корректности и сильной полноте для **PCL**. Алгоритмическая разрешимость **PCL**.
8. Исчисление естественного вывода, секвенциальное исчисление и табличное исчисление для **PCL**.
9. Критика закона исключённого третьего и парадоксы материальной импликации. Гильбертовское исчисление для пропозициональной интуиционистской логики (**PIL**) и теорема дедукции для него.
10. Семантика возможных миров для **PIL**. Теоремы о корректности и сильной полноте для **PIL**.
11. Финитная аппроксимируемость **PIL**. Алгоритмическая разрешимость **PIL**.
12. Полнота по Посту и структурная полнота.
13. Аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля и аксиома выбора.
14. Ординалы. Теорема о представлении вполне упорядоченных множеств.
15. Кардиналы. Теорема о существовании и единственности кардинала, равномощного данному множеству. Характеризация конечных и бесконечных множеств посредством кардиналов.
16. Базовые операции над ординалами и кардиналами.

Период обучения (модуль): **Семестр 5**

Темы **задач**:

1. Гильбертовское исчисление для **FOCL**. Допустимые правила вывода для **FOCL**. Логическая эквивалентность над **FOCL**. Теорема о полноте для **FOCL**.

2. Предварённые нормальные формы. Приведение формул языка **FOCL** к предварённым нормальным формам.

3. Теорема компактности Гёделя–Мальцева. Неаксиоматизируемость в **FOCL**. Теоремы Лёвенгейма–Сколема «вниз» и «вверх».

4. Арифметика Робинсона **Q** и арифметика Пеано **PA**. Представимость вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств в **Q**.

5. Разрешимость и неразрешимость элементарных теорий. Определимость и метод автоморфизмов.

**Список вопросов к экзамену:**

1. Язык классической логики первого порядка (**FOCL**).
2. Гильбертовское исчисление для **FOCL** и теорема дедукции для него.
3. Допустимые правила вывода для **FOCL**. Примеры.
4. Логическая эквивалентность над **FOCL**. Примеры.
5. Предварённые нормальные формы. Теорема о приведении формул языка **FOCL** к предварённым нормальным формам.
6. Теоретико-модельная семантика для **FOCL**. Теорема о корректности для **FOCL**.
7. Теорема о сильной полноте для **FOCL**.
8. Теорема компактности Гёделя–Мальцева. Примеры свойств, не аксиоматизируемых в **FOCL**.
9. Теоремы Лёвенгейма–Сколема «вниз» и «вверх».
10. Арифметика Робинсона (**Q**) и арифметика Пеано (**PA**). Представимость вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств в **Q** (схема доказательства).
11. Теорема Матиясевича о диофантовости вычислимо перечислимых множеств (без доказательства). Определимость и метод автоморфизмов.
12. Лемма о диагонализации. Первая теорема Гёделя о неполноте.
13. Теорема Чёрча о неразрешимости **FOCL**. Теорема Тарского о неопределимости истинности.
14. Результаты о разрешимости и неразрешимости элементарных теорий различных естественных классов структур (групп, полей, графов, решёток и так далее).
15. Предикаты доказуемости. Вторая теорема Гёделя о неполноте.
16. «Конструктивные контрпримеры» и реализуемость по Клини.

### 3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

## 3.2. Кадровое обеспечение

### 3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

### 3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

## 3.3. Материально-техническое обеспечение

### 3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

### 3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

### 3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

### 3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

### 3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

## 3.4. Информационное обеспечение

### 3.4.1 Список обязательной литературы

1. Верещагин, Н.К., и Шень, А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2: Языки и исчисления — 4-е изд., испр. — М.: Изд-во МЦНМО, 2012. — 240 с. Электронная версия: http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf
2. Клини, С.К. Введение в метаматематику / пер. с англ. А.С. Есенина–Вольпина; под ред. В.А. Успенского. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1957. — 527 с.
3. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф.А. Кабакова; под ред. С.И. Адяна. — 3-е изд. — Москва: Наука, 1984. — 319 с.

### 3.4.2 Список дополнительной литературы

1. Верещагин, Н.К., и Шень, А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1: Начала теории множеств — 4-е изд., доп. — М.: Изд-во МЦНМО, 2012. — 112 с. Электронная версия: http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part1-2.pdf
2. Верещагин, Н.К., и Шень, А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3: Вычислимые функции — 4-е изд., испр. — М.: Изд-во МЦНМО, 2012. — 160 с. Электронная версия: http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part3-2.pdf
3. Кейслер, Г., и Чэн, Ч.Ч. Теория моделей / пер. с англ. С.С. Гончарова и др.; под ред. Ю.Л. Ершова и А.Д. Тайманова. — М.: Мир, 1977. — 614 с.
4. Успенский, В.А., Верещагин, Н.К., и Плиско, В.Е. Вводный курс математической логики. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 135 с.

### 3.4.3 Перечень иных информационных источников

1. Ершов, Ю.Л., и Палютин, Е.А. Математическая логика. — 6-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2011. — 356 с.

2. Лавров, И.А., и Максимова, Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 5-е изд., испр. М.: Физматлит, 2004. — 256 с.
3. Мальцев, А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции — 2-е изд. — М.: Наука, 1986. — 368 с.
4. Boolos, G.S., Burgess, J.P., and Jeffrey, R.C. Computability and Logic. — 5th ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — xiv + 350 p.
5. Chriswell, I., and Hodges, W. Mathematical Logic. — Oxford: Oxford University Press, 2007. — vi + 250 p.

**Раздел 4. Разработчики программы**

Сперанский Станислав Олегович, кандидат физико-математических наук, доцент Санкт-Петербургского государственного университета, s.o.speranski@spbu.ru