Дробные лапласианы Навье и Дирихле

А.И. Назаров (ПОМИ РАН, СПбГУ)

Как известно, обычный оператор Дирихле-Лапласа в гладкой области $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ можно определить двумя способами (кроме стандартного):

$$1) \quad (-\Delta)u = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^2\mathcal{F}u, \qquad\qquad 2) \quad (-\Delta)u = \sum\nolimits_j \lambda_j(u,\varphi_j)\varphi_j.$$

В первом определении $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье, а u считается продолженной нулем на все $\mathbb{R}^n$; во втором λ_j и φ_j – собственные числа и ортонормированные собственные функции Дирихле-Лапласиана.

Мы рассмотрим два естественных определения дробных лапласианов – "Дирихле" и "Навье", являющиеся обобщениями определений 1) и 2). Именно, для $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ положим

$$1) \quad (-\Delta)^s_D u = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^{2s}\mathcal{F}u, \qquad\qquad 2) \quad (-\Delta)^s_N u = \sum\nolimits_j \lambda_j^s(u,\varphi_j)\varphi_j.$$

Первый из этих операторов возникает, в частности, как генератор случайного процесса, допускающего скачки на произвольное расстояние в соответствии с подходящим законом распределения. Второй же представляет собой функцию (степень) Дирихле-Лапласиана в смысле спектральной теории.

Легко видеть, что оба определения порождают положительно определенные операторы; соответствующие квадратичные формы задаются формулами

$$Q_s^D[u] = ((-\Delta_\Omega)^s_D u, u) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi; \qquad Q_s^N[u] = ((-\Delta_\Omega)^s_N u, u) := \sum\nolimits_j \lambda_j^s \cdot |(u,\varphi_j)|^2$$

с областями определения

$$\mathrm{Dom}(Q_s^D) = \{u \in L_2(\mathbb{R}^n) \,:\, \mathrm{supp}\, u \subset \overline{\Omega},\ Q_s^D[u] < \infty\};$$
$$\mathrm{Dom}(Q_s^N) = \{u \in L_2(\Omega) \,:\, Q_s^N[u] < \infty\}.$$

Обе эти области определения – подпространства в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^n)$. Их свойства описаны во многих классических монографиях, напр., [3]. В частности, хорошо известно, что $\mathrm{Dom}(Q_s^D) \subset \mathrm{Dom}(Q_s^N)$, и $\mathrm{Dom}(Q_s^D) = \mathrm{Dom}(Q_s^N)$ при $s < 3/2$.

Мы обсудим серию неравенств, связывающих операторы $(-\Delta)^s_N$ и $(-\Delta)^s_D$. В частности, мы покажем, что при $s < 1$ разность этих операторов положительна как в смысле квадратичных форм, так и в поточечном смысле. Ключевую роль в доказательстве является замечательное представление через обобщенное гармоническое продолжение, полученное Каффарелли и Сильвестром для $(-\Delta)^s_D$ и Стинга и Торреа для $(-\Delta)^s_N$.

Доклад основан на совместных работах с R. Musina, Universita di Udine (см. [1], [2]).

Список литературы

[1] R. Musina, A.I. Nazarov, On fractional Laplacians, Comm. in PDEs, **39** (2014), N9, 1780-1790. https://arxiv.org/abs/1308.3606

[2] R. Musina, A.I. Nazarov, On fractional Laplacians–2, Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Nonlinéaire. **33** (2016), N6, 1667-1673. https://arxiv.org/abs/1408.3568

[3] Х. Трибель, Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, М., Мир, 1980.