Отражение гармонических функций относительно границ регулярных областей в $\mathbf{R}^N$

П.В. Парамонов (Москва, мехмат МГУ)

Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^N$ $(N \in \{2, 3, \ldots\})$ с границей $\partial D = \Gamma$, и пусть $\Omega = \mathbf{R}^N \setminus \overline{D}$ также является областью. Пусть $f \in C(\overline{D})$ – вещественная функция, гармоническая в D, а g – решения задачи Дирихле в Ω с граничной функцией $f|_{\partial\Omega}$. Функция g называется *гармоническим отражением* функции f относительно Γ, а оператор $R_D : f \to g$ – *оператором гармонического отражения.* Естественно также потребовать, чтобы области D и Ω были *регулярными* в смысле соответствующей задачи Дирихле.

Планируется обсудить следующий вопрос.

При заданных $m > 0$ и $m' > 0$, для каких D (или Γ) из условия $f \in Lip^m(\overline{D})$ следует, что $g \in Lip^{m'}(\overline{\Omega})$?

При выполнении последнего свойства (и стандартной оценке соответствующих норм) говорят, что оператор R_D является (m, m')-*непрерывным.* Вопрос о (m, m')-непрерывности операторов R_D является открытым даже в контексте областей с кусочно-гладкими границами.

Будет приведен ряд новых (в определенном смысле точных) результатов и конкретных задач по указанной тематике, а также обсуждена их связь с (m, m')-непрерывностью операторов Пуассона P_D и P_Ω, а также $Lip^{m'}$-непрерывностью функции Грина G_Ω области Ω (вблизи Γ).

План лекций.

Лекция 1. (90 мин.) Необходимые и достаточные условия (m, m')-непрерывности операторов P_D и R_D для областей на плоскости $(N = 2)$.

Лекция 2. (90 мин.) То же для случаев $N \geq 3$, $0 < m' \leq m < 1$. Специальный случай $m = m' = 1$. Задачи.

Для понимания основной части материала достаточно владеть курсами комплексного анализа и теории гармонических функций (в объеме математических специальностей университетов).

Желательно также знакомство с понятиями гармонической меры, фундаментального решения (для уравнения Лапласа) и свертки обобщенных функций.

petr.paramonov@list.ru