Аналитический семинар лаборатории Чебышева

Четверг, 6 сентября 2018, 15:30, ауд. 413, 14-я линия В. О., 29

Дмитрий Столяров

О свойствах гладкости преобразования Фурье

Пусть Σ — некоторое подмножество $\mathbb{R}^d$ (например, гиперповерхность). Когда можно определить след на Σ преобразования Фурье произвольной функции f, суммируемой со степенью p? Ответ на этот вопрос зависит от параметра p: если $p = 1$, то всегда (так как функция $\hat{f}$ непрерывна), а если $p = 2$, то только в случае когда мера Лебега множества Σ положительна. В промежуточном режиме $p \in (1, 2)$ ситуация более интересна, и ответ может зависеть от геометрических свойств множества Σ, таких, например, как его кривизна. Скажем, нельзя определить след $\hat{f}$ на гиперплоскости, если $p > 1$.

Пример положительного результата в этой области — теорема Стейна–Томаса (1975):

$$\|\hat{f}|_{S^{d-1}}\|_{L_2(S^{d-1})} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}, \quad p \in \Big[1, \frac{2d+2}{d+3}\Big],$$

которая позволяет определить след преобразования Фурье на сфере. Сферу в этой теореме можно заменить любой компактной достаточно гладкой гиперповерхностью с невырожденной гауссовой кривизной. Таким образом, преобразование Фурье L_p-функции обладает неожиданным свойством непрерывности — далеко не всякая функция, суммируемая со степенью $\frac{p}{p-1}$ (напомним, что $\hat{f} \in L_{\frac{p}{p-1}}$), имеет след на гиперповерхности.

А когда можно определить след производных преобразования Фурье L_p-функции на сфере? Иными словами, может ли неравенство

$$\|\nabla(\hat{f})|_{S^{d-1}}\|_{L_2(S^{d-1})} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$$

быть верным при некоторых значениях p? Ответ на этот вопрос отрицательный, и пример построить несложно. Однако, неравенство станет верным, если, например, предположить, что функция $\hat{f}$ обращается в нуль на сфере. Более того, достаточно потребовать лишь высокой гладкости сужения $\hat{f}$ на сферу:

$$\|\nabla(\hat{f})|_{S^{d-1}}\|_{L_2(S^{d-1})} \leq C\Big(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \|\hat{f}\|_{H^{\ell}(S^{d-1})}\Big).$$

Я расскажу о классической теории, связанной с теоремой Стейна–Томаса, и опишу некоторую часть результатов М. Гольдберга и меня, касающихся старших производных.

После доклада будет краткое организационное собрание.

Приглашаются все желающие!