Листочек 1

Дедлайн - 10.03.19

1. (3) При каких $p > 0$ функция $f(x,y) = |y|^p \sin(\frac{x}{y})$, доопределенная по непрерывности при $y = 0$, является дифференцируемой в каждой точке $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

2. (3) Чему может быть равен интеграл $\int_0^1 f(x)dx$ при условии, что функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна и для любых $x, y \in [0,1]$ выполнено неравенство $f(x) + f(y) \geqslant |x - y|$?

3. (3) Пусть $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ — строго убывающая непрерывная функция, т.ч. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Докажите, что
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx = +\infty.$$

4. Докажите, что найдется такая константа $C > 0$, что для любой функции $f \in C^2(0,1)$ выполнено неравенство:
$$\text{а)}(3) \sup_{(0,1)} |f'| \leqslant C(\sup_{(0,1)} |f| + \sup_{(0,1)} |f''|);$$
$$\text{б)}(3) \int_0^1 |f'| \leqslant C \int_0^1 (|f| + |f''|).$$

Задачи 5,6,7 можно сдавать только “преподавателям”

5. (3) Найдите значение предела
$$\lim_{t\to 1-0} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}.$$

6. (3) Найдите асимптотику функции $f(x) = \int_0^x (1 + t^{-1})^t \, dt$ с точностью до $O(1)$ при $x \to +\infty$.

7. (3) Функция $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ дифференцируема, $f' > 0$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{f^{1+\varepsilon}(x)}{f'(x)} dx = +\infty.$$

   Постройте контрпример для случая $\varepsilon = 0$.