Альтернативный подход к улучшению суммируемости весов класса Геринга

Д. М. Столяров

8 апреля 2019 г.

1 Постановка и основная идея

Пусть Q — некоторый куб пространства $\mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbb{D}$ — множество его диадических подкубов, $\mathbb{D}_n$ — множество диадических подкубов с ребром, в 2^n раз меньшим ребра Q. Как обычно, весом мы называем неотрицательную суммируемую функцию.

Определение 1.1. Пусть $s > 1$ и $C > 1$. Классом Геринга или классом выполнения обратного неравенства Гельдера $\mathrm{RH}_{s,C}$ назовем множество весов φ, таких что для всякого куба $J \in \mathbb{D}$ верно неравенство

$$\fint\limits_J \varphi^s \leqslant C\Big(\fint\limits_J \varphi\Big)^s. \tag{1.1}$$

Отметим, что обратное к (1.1) неравенство

$$\fint\limits_J \varphi^s \geqslant \Big(\fint\limits_J \varphi\Big)^s$$

выполнено всегда (и является простым следствием неравенства Гельдера).

Теорема 1.2. *Для всякого $s > 1$ и всякой константы $C > 1$ существует число $p > s$, такое что для всех весов $\varphi \in \mathrm{RH}_{s,C}$ величина $\|\varphi\|_{L_p(Q)}$ ограничена некоторой константой, зависящей лишь от C и s.*

Эта теорема играет важную роль в теории квазирегулярных отображений (см. [2]), в частности, показывает, что квазирегулярные отображения дифференцируемы почти всюду. На самом деле, там нужно некоторое обобщение теоремы 1.2, которого мы не будем касаться. Мы предложим доказательство, отличное от приведенного в [2]. Не совсем понятно, как нашим методом получить упомянутое обобщение. С другой стороны, наш метод работает лишь с диадическими кубами, в то время как в [2] ограничение (1.1) накладывается для всех кубов J. Конечно, описываемый метод не нов, например, он изложен в работе [4].

Мы хотим доказать неравенство

$$\fint\limits_Q |\varphi|^p \leqslant B\Big(\fint \varphi, \fint \varphi^s, C, s\Big), \quad \varphi \in \mathrm{RH}_{s,C}, \tag{1.2}$$

где B — некоторая константа, зависящая лишь от четырех перечисленных параметров, но не от самого веса φ. Идея состоит в том, чтобы рассмотреть процесс (то есть, последовательность функций), который стартует, например, с постоянной функции, сходится к φ, и измерить некоторую величину от него, которая будет полуинвариантом. Если в самом начале эта величина равна $B\Big(\fint \varphi, \fint \varphi^s, C, s\Big)$, а в конце $\fint_Q |\varphi|^p$, то предложенная конструкция докажет неравенство (1.2).

Сначала определим последовательность функций. Функции будут $\mathbb{R}^2$-значные:

$$\Phi_n(x) = \sum_{J\in\mathbb{D}_n} \Big(\fint_J \varphi, \fint_J \varphi^s\Big)\cdot \chi_J(x), \quad x\in Q.$$

Иными словами, функция Φ_n постоянна на кубах множества $\mathbb{D}_n$. На кубе $J\in\mathbb{D}_n$ она равна вектору $\Big(\fint_J \varphi, \fint_J \varphi^s\Big)$.

Лемма 1.3. *Функции Φ_n обладают следующими свойствами:*

1) функция Φ_0 постоянна;

2) функции Φ_n сходятся к функции (φ,φ^s) почти всюду;

3) если $J_1, J_2, \ldots, J_{2^d}\in\mathbb{D}_{n+1}$ — диадические подкубы диадического куба $J\in\mathbb{D}_n$, то имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{2^d} 2^{-d}\Phi_{n+1}(J_j) = \Phi_n(J);^{1} \tag{1.3}$$

4) значения функции Φ_n лежат в множестве

$$\Omega_{s,C} = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^s \leqslant x_2 \leqslant Cx_1^s\}. \tag{1.4}$$

Доказательство этой леммы нетрудно: первый и третий пункты следуют из определения функций Φ_n, второй пункт есть следствие теоремы Лебега о дифференцировании интеграла; мы оставляем доказательство читателю. Отметим, что условие $\varphi\in\mathrm{RH}_{s,C}$ используется лишь в последнем пункте.

Таким образом, мы описали процесс. Он действительно начинает развиваться с постоянной функции и, усложняясь, сходится к функции φ (по первой координате). Теперь опишем полуинвариант. В каком-то смысле, в качестве полуинварианта будет выступать величина B из формулы (1.2), если смотреть на нее как на функцию параметров $\fint\varphi$ и $\fint\varphi^s$. Более точно, пусть $G\colon \Omega_{s,C}\to\mathbb{R}$ — некоторая функция. Когда величина

$$I_n = \fint_Q G(\Phi_n) \tag{1.5}$$

не возрастает по параметру n (для всевозможных φ)? Ответ на этот вопрос будет дан в следующей главке.

[1] Читатель, знакомый с понятием мартингала, уже сообразил, что $\{\Phi_n\}_n$ есть мартингал относительно диадической фильтрации. Необычность состоит в том, что это векторно-значный мартингал.

2 Поиск достаточных условий на функцию G

Посмотрим на первый шаг, то есть $n = 0$. В этом случае,

$$\fint_Q G(\Phi_0) = G\Big(\fint_Q \varphi, \fint_Q \varphi^s\Big).$$

Величину $\fint_Q G(\Phi_1)$ вычислить немного сложнее:

$$\fint_Q G(\Phi_1) = \sum_{Q_j \in \mathbb{D}_1} 2^{-d} \fint_{Q_j} G\Big(\fint_{Q_j} \varphi, \fint_{Q_j} \varphi^s\Big).$$

Мы разбили интеграл по кубу Q на 2^d интегралов (по кубам набора $\mathbb{D}_1$). На каждом из этих кубов функция Φ_1 постоянна. Про значения функции Φ_1 на этих кубах известно лишь свойство (1.3). Поэтому, если ввести обозначение

$$x^j = \Big(\fint_{Q_j} \varphi, \fint_{Q_j} \varphi^s\Big), \quad j = 1, 2, \ldots, 2^d,$$

то необходимо выполнение неравенства

$$G(x) \geqslant 2^{-d} \sum_{j=1}^{2^d} G(x^j), \quad x = 2^{-d} \sum_{j=1}^{2^d} x^j. \tag{2.1}$$

Конечно, точки x^j и x должны лежать в области $\Omega_{s,C}$, заданной формулой (1.4). Неравенство (2.1) похоже на условие вогнутости[2]. Ввиду самоподобия конструкции, выполнения неравенства (2.1) достаточно для невозрастания величин I_n при любом n. Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть функция $G\colon \Omega_{s,C} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству* (2.1) *для всех наборов точек $\{x^j\}_{j=1}^{2^d}$, таких что $x^j \in \Omega_{s,C}$ и $x \in \Omega_{s,C}$. Тогда последовательность чисел I_n, определенных формулой* (1.5)*, не возрастает.*

С неравенством (2.1) не совсем удобно работать: трудно перебирать все наборы точек. Это, в некотором роде, неравенство вогнутости, и оно допускает дифференциальную интерпретацию. Введем важное определение.

Определение 2.2. Пусть Ω — некоторое множество в $\mathbb{R}^m$. Функция $G\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется локально вогнутой, если ее сужение на любую выпуклую подобласть Ω вогнуто.

Лемма 2.3. *Пусть функция $G\colon \Omega_{s,2^{ds}C} \to \mathbb{R}$ локально вогнута. Тогда ее сужение на область $\Omega_{s,C}$ удовлетворяет неравенству* (2.1)*.*

К сожалению, автор не смог придумать короткого доказательства этой леммы (хотя лемма не сложна). По сути, лемма утверждает, что для любого набора точек $\{x^j\}_{j=1}^{2^d}$, лежащих в области $\Omega_{s,C}$, и таких что их среднее x лежит в $\Omega_{s,C}$, выпуклая оболочка этого набора лежит в "раздутой"

[2]И не удивительно: если $\{M_n\}_n$ — вещественно-значный мартингал, а f — вогнутая функция, то $\{f(M_n)\}_n$ — супермартингал. Конечно, этот принцип, основанный на неравенстве Йенсена, верен и для векторно-значных мартингалов.

области $\Omega_{s,2^{ds}C}$. Точные формы утверждений такого типа встречаются в различных работах, например, в [5], однако, автор уверен, что у неточной леммы 2.3 должно быть короткое доказательство.

Отметим, что если функция G дважды непрерывно-дифференцируема, и в области $\Omega_{s,2^{ds}C}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} G_{x_2x_2} &< 0; \\ G_{x_2x_2}G_{x_1x_1} - G_{x_1x_2}^2 &> 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

то функция G локально вогнута.

Подведем промежуточный итог. Чтобы величина I_n была полуинвариантом, достаточно построить дважды непрерывно-дифференцируемую функцию $G\colon \Omega_{s,2^{ds}C} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую дифференциальным неравенствам (2.2), и рассмотреть ее сужение на область $\Omega_{s,C}$. Таким образом, мы построили последовательность величин, начинающуюся с $G(\fint_Q \varphi, \fint_Q \varphi^s)$ и не возрастающую. Надо лишь, чтобы $\lim I_n = \fint_Q \varphi^p$. По второму пункту леммы 1.3, предельное соотношение $\Phi_n \to (\varphi, \varphi^s)$ имеет место почти всюду, поэтому

$$I_n \to \fint_Q G(\varphi, \varphi^s), \quad n \to \infty, \tag{2.3}$$

(этот предельный переход мы не обосновали, но пока что предположим, что он верен). Если мы положим $G(x_1, x_1^s) = x_1^p$ для всех $x_1 \in \mathbb{R}$, то получим $I_n \to \fint_Q \varphi^p$, что и докажет теорему 1.2. Поэтому для нашей функции G мы потребуем не только выполнения дифференциальных неравенств (2.2), но и граничного условия

$$G(x_1, x_1^s) = x_1^p, \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Как же предъявить загадочную функцию G? Ответ на этот вопрос читатель найдет в следующей главке.

3 Поиск функции G

Лемма 3.1. *Если число p достаточно близко к s (в зависимости лишь от s и C), то существует дважды непрерывно-дифференцируемая функция $G\colon \Omega_{2^{ds}C} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенствам* (2.2) *и граничному условию* (2.4).

Наша область $\Omega_{2^{ds}C}$ и граничные данные (2.4) однородны. Поэтому разумно искать функцию G, удовлетворяющую условию однородности

$$G(\lambda x_1, \lambda^s x_2) = \lambda^p G(x_1, x_2), \quad \lambda > 0.$$

Иными словами,

$$G(x_1, x_2) = x_1^p g(x_1^{-s} x_2), \quad g\colon [1, C'] \to \mathbb{R},$$

где $C' = 2^{ds}C$. Граничные условия дают

$$g(1) = 1. \tag{3.1}$$

Дифференциальные неравенства переписать чуть труднее. Вычислим производные функции G:

$$G_{x_1} = px_1^{p-1}g(x_1^{-s}x_2) - sx_1^{p-s-1}x_2g'(x_1^{-s}x_2);$$
$$G_{x_2} = x_1^{p-s}g'(x_1^{-s}x_2);$$
$$G_{x_1x_1} = p(p-1)x_1^{p-2}g(x_1^{-s}x_2) - psx_1^{p-s-2}x_2g'(x_1^{-s}x_2) -$$
$$s(p-s-1)x_1^{p-s-2}x_2g'(x_1^{-s}x_2) + s^2x_1^{p-2s-1}x_2^2g''(x_1^{-s}x_2);$$
$$G_{x_1x_2} = px_1^{p-s-1}g'(x_1^{-s}x_2) - sx_1^{p-s-1}g'(x_1^{-s}x_2) - sx_1^{p-2s-1}x_2g''(x_1^{-s}x_2);$$
$$G_{x_2x_2} = x_1^{p-2s}g''(x_1^{-s}x_2).$$

Подставляем эти выражения в (2.2), полагаем $x_1 = 1$ и $x_2 = x$ (достаточно проверять неравенства (2.2) лишь при $x_1 = 1$ ввиду однородности) и получаем

$$g'' < 0; \tag{3.2}$$
$$g''\Big(p(p-1)g - psxg' - s(p-s-1)xg' + s^2g''\Big) - \Big((p-s)g' - sxg''\Big)^2 > 0. \tag{3.3}$$

У функции g всюду аргумент x. Второе неравенство можно слегка упростить, приведя подобные члены:

$$g''(p(p-1)g - s(s-1)xg') - (p-s)^2(g')^2 > 0. \tag{3.4}$$

Дальше уже можно просто подобрать функцию g. Например, в виде

$$g(x) = 1 + \kappa(x-1) - x^2, \quad x \in [1, C'],$$

где κ — параметр, который предстоит выбрать. Отметим, что эта функция удовлетворяет неравенству (3.2), а также граничному условию (3.1). Ясно, что если неравенство (3.4) выполнено для всех $x \in [1, C']$ при $p = s$, то выполнено и при p, чуть большем s. Поэтому, достаточно подобрать κ так, чтобы было выполнено

$$g''(g - xg') > 0, \quad x \in [1, C'],$$

что переписывается как $1 - \kappa + x^2 < 0$. Можно взять $\kappa = (C')^2 + 239$.

Подведем итог. Мы предъявили функцию $G\colon \Omega_{s,2^{ds}C}$, которая удовлетворяет дифференциальным неравенствам (2.2) и граничным условиям (2.4). Согласно лемме 2.3, сужение этой функции на область $\Omega_{s,C}$ удовлетворяет неравенству (2.1), и стало быть, построенные с помощью этой функции G величины I_n не убывают.

Завершим теперь доказательство теоремы 1.2. По сути, нам осталось обосновать предельный переход (2.3). На самом деле, достаточно доказать неравенство

$$\fint_Q |\varphi|^p \leqslant \varliminf_{n\to\infty} I_n.$$

А это следует из леммы Фату (конечно, функция G не отрицательна):

$$\varliminf_{n\to\infty} I_n = \varliminf_{n\to\infty} \fint_Q G(\Phi_n) \geqslant \fint_Q \varliminf_{n\to\infty} G(\Phi_n) = \fint_Q G(\varphi, \varphi^s),$$

по второму пункту леммы 1.3 и непрерывности функции G (наша функция G даже дважды непрерывно дифференцируема). Осталось воспользоваться граничным условием (2.4).

На самом деле, предельное соотношение (2.3) верно. Читатель может доказать это в качестве упражнения.

В завершение отметим, что изложенный метод позволяет найти наилучшее возможное значение p и наилучшую возможную оценку B в формуле (1.2), а также точные константы в различных родственных неравенствах. Приглашаем читателя обратиться к работам [1] и [3].

Список литературы

[1] В. И. Васюнин, *Взаимные оценки L^p-норм и функция Беллмана*, Зап. научн. сем. ПОМИ **355** (2008), 81–138.

[2] B. Bojarski, T. Iwaniec, *Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in R^n*, Ann. Acad. Sci. Fin. **8** (1983), 257–324.

[3] M. Dindos, T. Wall, *The sharp A_p-constant for weights in a reverse-Hölder class*, Rev. Mat. Iberoam. **25**:2 (2009), 559–594.

[4] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, *Bellman function in stochastic control and harmonic analysis*, 2001.

[5] D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskiy, *Monotonic rearrangements of functions with small mean oscillation*, Stud. Math. **231**:3 (2015), 257–268.