Листочек 20. Революционно утешительный

Дедлайн 28.11.19

1. **[10]** Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ чётна и непрерывна, а её сужение на положительную ось выпукло, неотрицательно и не возрастает. Докажите, что $\hat{f} \geqslant 0$.

2. **[10]** Пусть T – нормальный оператор в гильбертовом пространстве H, f – ограниченная борелевская функция на спектре $\sigma(T)$ оператора T. Вычислите спектр оператора $f(T)$ в терминах функции f, множества $\sigma(T)$ и множеств меры нуль относительно разложения единицы оператора T. В качестве следствия получите формулу $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ для непрерывных функций f на $\sigma(T)$.

3. **[10]** Как и всякий унитарный оператор, преобразование Фурье в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ унитарно эквивалентно прямой сумме операторов умножения на независимую переменную в прямой сумме пространств $L^2(\mu_k)$. Постройте явно любой набор мер μ_k, удовлетворяющей этому свойству.

4. **[10]** Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Докажите, что $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда найдутся элементы $\psi_n \in H$ единичной нормы, такие, что $\|(\lambda - A)\psi_n\| \to 0$.

5. **[10]** Опишите все гладкие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие что для всякого заряда μ ограниченной вариации на прямой обобщённая функция ν, построенная по формуле

$$\hat{\nu}(\xi) = \hat{\mu}(f(\xi)),$$

тоже является зарядом ограниченной вариации.

6. **[10]** Нетрудно видеть что оператор свёртки с обобщённой функцией v.p.$\frac{1}{x}$ непрерывно действует на $L_2(\mathbb{R})$. Вычислите величину

$$\lambda_1\Big(\big\{y \in \mathbb{R} \;\big|\; \big|\chi_E * \mathrm{v.p.}\frac{1}{x}\big|(y) > t\big\}\Big)$$

в терминах величины t и $\lambda_1(E)$ для всякого множества E.

7. **[10]** Пусть w — положительная функция на вероятностном пространстве (X, P). Зададим весовые нормы формулами

$$\|f\|_{L_p(w)} = \Big(\int |f|^p w\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in [1, \infty).$$

Пусть линейный оператор T, отображающий простые функции в измеримые, ограниченно действует из $L_3(u)$ в L_1, а также из L_1 в $L_3(v)$. Докажите, что он непрерывно отображает $L_{\frac{3}{2}}(\sqrt[4]{u})$ в $L_{\frac{3}{2}}(\sqrt[4]{v})$.

8. **[10]** Докажите, что существует константа $C \geqslant 1$, такая что для всякого тригонометрического полинома P степени n имеет место неравенство $\|P'\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant Cn\|P\|_{L_\infty(\mathbb{T})}$.

9. **[10]** Пусть P — тригонометрический полином вида $P(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j e^{2\pi i 3^j x}$. Докажите неравенство

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j| \lesssim \|P\|_{L_\infty(\mathbb{T})}.$$

10. **[10]** Пусть γ_1 и γ_2 — две гладкие кривые на плоскости, трансверсально пересекающиеся в одной точке. Пусть μ_1 и μ_2 — заряды с компактными носителями и гладкими плотностями относительно мер Лебега на этих кривых. Докажите, что если носители мер достаточно близки к точке пересечения (содержатся в некоторой её окрестности), то меры можно корректно умножить, в том смысле, что существует обобщённая функция $\mu = \mu_1 \cdot \mu_2$, такая что $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 * \hat{\mu}_2$, и свёртка в последней формуле корректно определена (например, в классическом поточечном определении свёртки интеграл сходится абсолютно). Вычислите функцию μ.