

Санкт-Петербургский государственный университет

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Алгебра
Algebra

Язык(и) обучения

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 11

Регистрационный номер рабочей программы: 060940

Раздел 1. Характеристики учебных занятий

1.1. Цели и задачи учебных занятий

Сообщение сведений об алгебре в объеме, необходимом для общего развития и изучения смежных дисциплин физико-математического цикла. Усвоение основных идей, понятий и фактов высшей алгебры.

1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)

Не предусмотрены.

1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач, на основе анализа освоенных разделов: элементарная теория колец и арифметика, многочлены и поля, линейная алгебра, теория групп, квадратичные и эрмитовы формы, представления конечных групп, полилинейная алгебра, начала теории категорий, начала гомологической алгебры, числовые кольца.

1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий

практические занятия 58 часов, контрольные работы 2 часа, коллоквиумы 4 часа, промежуточная аттестация (зачеты и экзамены) 4 часа

Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий

2.1. Организация учебных занятий

2.1.1 Основной курс

Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся																		
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Контактная работа обучающихся с преподавателем											Самостоятельная работа				Объём активных и интерактивных форм учебных занятий	Трудоёмкость	
	лекции	семинары	консультации	практические занятия	лабораторные работы	контрольные работы	коллоквиумы	текущий контроль	промежуточная аттестация	итоговая аттестация	под руководством преподавателя	в присутствии преподавателя	сам. раб. с использованием методических материалов	текущий контроль (сам.раб.)	промежуточная аттестация (сам.раб.)			итоговая аттестация (сам.раб.)
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ																		
очная форма обучения																		
Семестр 3	60		2	28		2(1)	4		2				82		34		38	6
	2-50		2-50	10-25		10-25	2-50		2-50				1-1		1-1			
Семестр 4	32		2	30					2				75		37		36	5
	2-50		2-50	10-25					2-50				1-1		1-1			
ИТОГО	92		4	58		2	4		4				157		71		74	11

Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации						
Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п.	Формы текущего контроля успеваемости		Виды промежуточной аттестации		Виды итоговой аттестации (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ)	
	Формы	Сроки	Виды	Сроки	Виды	Сроки
ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ						
очная форма обучения						
Семестр 3			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		
Семестр 4			зачёт, по результатам работы за период обучения, экзамен, устно, традиционная форма	по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации		

2.2. Структура и содержание учебных занятий

Период обучения (модуль): Семестр 3

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Полилинейная и внешняя алгебра	Лекции	20
		практические занятия	16
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	30
2	Контрольная работа	контрольная работа	4
3	Начала теории категорий	Лекции	22
		практические занятия	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	25
4	Коллоквиум	коллоквиум	4
5	Начала гомологической алгебры	Лекции	18
		практические занятия	6
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	27
6	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
7	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	34

Раздел 1: Полилинейная и внешняя алгебра

1. Билинейные формы. Определение тензорного произведения модулей, его существование и единственность.
2. Базис тензорного произведения. Несколько раз ковариантные и контравариантные тензоры, поведение при замене базиса.
3. Билинейная форма как 2-ковариантный тензор, опускание и поднимание индексов. Свертка. Знакопеременные формы и поливекторы. Классификация симплектических форм и бивекторов.
4. Внешняя алгебра: определение, существование и единственность, базис. Градуированная коммутативность.
5. Элемент объема. Определитель в терминах внешней алгебры. Формула Лапласа. Двойственная к внешней алгебре.
6. Свертка поливектора с ковектором. Двойственность дополнительных внешних степеней.
7. Вложение Пюккера и соотношения Пюккера. Звезда Ходжа. Интерпретация векторного произведения в R^3 .
8. Симметрическая алгебра. Алгебра многочленов как симметрическая алгебра.
9. Комплекс Кошуля.
10. Алгебра Клиффорда

Раздел 2: Начала теории категорий. Теория Галуа

1. Определение категории. Конкретные категории. Примеры.
2. Универсальные притягивающие и отталкивающие объекты. Произведение и копроизведение.
3. Определение функтора и естественного преобразования функторов. Примеры.
4. Пределы и копределы.
5. Категория функторов в Sets. Лемма Йонеды.
6. Сопряженность функторов. Сопряженность тензорного произведения и Hom.
7. Монады.
8. Аддитивные и абелевы категории.
9. Нормальные и сепарабельные расширения полей. Этальные алгебры.
10. Основная теорема теории Галуа.
11. Топология на абсолютной группе Галуа. Категорная формулировка основной теоремы теории Галуа.

Раздел 3: Начала гомологической алгебры

1. Короткие и длинные точные последовательности. Лемма о змее.
2. Точность функторов слева и справа. Hom и тензорное произведение.
3. Проективные, инъективные и плоские модули.
4. Проективная и инъективная резольвента.
5. Функторы Ext и Tor. Вычисление в случае колец главных идеалов.
6. Определение когомологий групп. Бар-резольвента.
7. Категория комплексов. Гомотопии и квазиизоморфизмы.
8. Локализация категорий.
9. Понятие триангулированной категории. Производная категория.

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

№ п/п	Наименование темы (раздела, части)	Вид учебных занятий	Количество часов
1	Числовые кольца	Лекции	16
		практические занятия	12
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	37
2	p-адические поля	Лекции	16
		практические занятия	18
		в присутствии преподавателя	
		по методическим материалам	38
3	Зачет	промежуточная аттестация (ауд)	2
4	Экзамен	промежуточная аттестация (ауд)	2
		промежуточная аттестация (с.р.)	37

Раздел 1: Числовые кольца

1. Нетеровы кольца.
2. Целые элементы и целое замыкание.
3. Кольца дискретного нормирования.

4. Локализация. Дедекиндовы кольца.
5. Основная теорема арифметики в дедекиндовых кольцах. Группа классов идеалов.
6. Теорема Минковского о выпуклом теле.
7. Числовые кольца. Теорема Дирихле о единицах.
8. Конечность группы классов идеалов.

Раздел 2: p-адические поля

1. Нормирование поля, пополнение.
2. Теорема Островского.
3. Лемма Гензеля.
4. Мультипликативная группа \mathbb{Q}_p . Квадраты в \mathbb{Q}_p .
5. Символ Гильберта.
6. Квадратичные формы над \mathbb{Q}_p .
7. Теорема Минковского-Хассе.

Раздел 3. Обеспечение учебных занятий

3.1. Методическое обеспечение

3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины

Посещение лекций и практических занятий

3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы

Основная и дополнительная литература

3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания

Методика проведения зачета

Зачет проводится в устной форме. Для получения зачета необходимо решить 60% задач, предлагаемых в течение семестра. В случае, если к моменту проведения зачета студент решил меньшее количество задач, на зачете ему предлагаются задачи аналогичные по тематике и сложности. Задачи даются в форме домашних заданий с устной сдачей («листочки»), письменных домашних заданий и контрольных. Темы задач фиксированы, количество и форма выдачи остается на усмотрение преподавателя практических занятий. Возможна выдача задач повышенной сложности, решение которых засчитывается в качестве индивидуальных достижений студента (при подаче заявок на именные стипендии, конкурсы и т.п.); сдача таких заданий проводится в устной форме.

Методика проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена. В спорной ситуации могут быть учтены результаты сдачи коллоквиума по предмету.

Критерии выставления оценок

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)

Период обучения (модуль): Семестр 3

Темы задач:

1. Примеры тензорных произведений модулей. Опускание и поднимание индексов, свертка. Вычисления во внешней алгебре. Формула Лапласа. Вложение Плюккера и формулы аналитической геометрии «без знаменателей». Алгебра Клиффорда.
2. Определения категории, функтора и естественного преобразования. Примеры пределов и копределов. Примеры сопряженных функторов. Универсальные алгебраические структуры в терминах монад. Соответствие между подгруппами и подполями в теории Галуа.
3. Диаграммный поиск. Вычисление проективной резольвенты в простых случаях. Когомологии циклической группы. Простейшие следствия из аксиом триангулированной категории.

Вопросы к **коллоквиуму** совпадают с вопросами 1-12 к экзамену.

Список вопросов к экзамену:

1. Билинейные формы. Определение тензорного произведения модулей, его существование и единственность.
2. Базис тензорного произведения. Несколько раз ковариантные и контравариантные тензоры, поведение при замене базиса.
3. Билинейная форма как 2-ковариантный тензор, опускание и поднимание индексов. Свертка.
4. Знакопеременные формы и поливекторы. Классификация симплектических форм и бивекторов.
5. Внешняя алгебра: определение, существование и единственность, базис. Градуированная коммутативность.
6. Элемент объема. Определитель в терминах внешней алгебры. Формула Лапласа. Двойственная к внешней алгебре.
7. Свертка поливектора с ковектором. Двойственность дополнительных внешних степеней.
8. Вложение Плюккера и соотношения Плюккера.
9. Звезда Ходжа. Интерпретация векторного произведения в \mathbb{R}^3 .
10. Симметрическая алгебра. Алгебра многочленов как симметрическая алгебра.
11. Комплекс Кошуля.
12. Алгебра Клиффорда
13. Определение категории. Конкретные категории. Примеры.
14. Универсальные притягивающие и отталкивающие объекты. Произведение и копроизведение.
15. Определение функтора и естественного преобразования функторов. Примеры.
16. Пределы и копределы.
17. Категория функторов в Sets. Лемма Йонеды.
18. Сопряженность функторов. Сопряженность тензорного произведения и Hom.
19. Монады.
20. Аддитивные и абелевы категории.
21. Нормальные и сепарабельные расширения полей. Этальные алгебры.
22. Основная теорема теории Галуа.
23. Топология на абсолютной группе Галуа. Категорная формулировка основной теоремы теории Галуа.
24. Короткие и длинные точные последовательности. Лемма о змее.

25. Точность функторов слева и справа. Нот и тензорное произведение.
26. Проективные, инъективные и плоские модули.
27. Проективная и инъективная резольвента.
28. Функторы Ext и Tor. Вычисление в случае колец главных идеалов.
29. Определение когомологий групп. Бар-резольвента.
30. Категория комплексов. Гомотопии и квазиизоморфизмы.
31. Локализация категорий.
32. Понятие триангулированной категории.
33. Производная категория.

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

Темы задач:

1. Сумма и произведение целых элементов (явные формулы для целой зависимости). Примеры локализаций. Квадратичные кольца и идеалы в них. Уравнение Пелля. Кольца целых в круговых полях.
2. Свойства нормирований. Вычисления в \mathbb{Q}_p . Свойства символа Гильберта. Квадратичные формы над \mathbb{Q} .

Список вопросов к экзамену:

1. Нетеровы кольца.
2. Целые элементы и целое замыкание.
3. Кольца дискретного нормирования.
4. Локализация. Дедекиндовы кольца.
5. Основная теорема арифметики в дедекиндовых кольцах. Группа классов идеалов.
6. Теорема Минковского о выпуклом теле.
7. Числовые кольца. Теорема Дирихле о единицах.
8. Конечность группы классов идеалов.
9. Нормирование поля, пополнение.
10. Теорема Островского.
11. Лемма Гензеля.
12. Мультипликативная группа \mathbb{Q}_p . Квадраты в \mathbb{Q}_p .
13. Символ Гильберта.
14. Квадратичные формы над \mathbb{Q}_p .
15. Теорема Минковского-Хассе (набросок доказательства).

3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса

3.2. Кадровое обеспечение

3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом

не требуется

3.3. Материально-техническое обеспечение

3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком студентов

3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования

доска для письма мелом или фломастером

3.3.3 Характеристики специализированного оборудования

не требуется

3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения

не требуется

3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка

3.4. Информационное обеспечение

3.4.1 Список обязательной литературы

1. Винберг Э.Б., Курс алгебры. – М.: МЦНМО, 2013
2. Кострикин А.И., Сборник задач по алгебре. – М.: МЦНМО, 2009
3. Антипов М.А. и др. Задачи по алгебре. Комплексные числа и многочлены. – СПб.: Издательство СПбГУ, 2011
4. Антипов М.А. и др. Задачи по алгебре. Основы теории чисел. – СПб.: Издательство СПбГУ, 2008

3.4.2 Список дополнительной литературы

1. Маклейн С., Категории для работающего математика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004
2. Борович З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. – М.: Наука, 1985
3. Жуков И.Б., Коммутативная алгебра. – СПб.: Издательство СПбГУ, 2009

3.4.3 Перечень иных информационных источников

не предусмотрен

Раздел 4. Разработчики программы

Петров Виктор Александрович, кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. лаборатории Чебышева СПбГУ, victorapetrov@gmail.com