Листочек 1. Сходящийся.
Математический анализ. 1 курс.

Выдан: 8 сентября 2020 г. Дедлайн: 7 октября 2020 г.

Математика – противная наука, которая является ключом к заветной дверце.
Это тяжелый мешок с картошкой, который нужно тащить за сотню километров.
Ты с ней стараешься бороться, а она по-дружески бьёт твоё лицо.

Базовые задачи

1. (1.5 балла. *Функция типа Конвея*) Определим функцию $\varphi\colon [0,1) \to [0,1]$ следующим образом. Пусть $x \in \mathbb{R}$ — число. Запишем x в 11-ричной системе счисления:

$$x = 0.d_1 d_2 d_3 \dots = \frac{d_1}{11} + \frac{d_2}{11^2} + \frac{d_3}{11^3} + \dots,$$

где $d_1, d_2 \dots \in \{0, 1, \dots, 9, A\}$, A — одиннадцатиричная цифра "десять". Если среди цифр $d_1, d_2, \dots$ оказалось бесконечно много цифр A, то положим $\varphi(x) := 0$. Если же цифр A конечное количество, последняя A стоит на n-м месте ($n \in \mathbb{N}$) и $x = 0.d_1 d_2 \dots d_{n-1} A d_{n+1} d_{n+2} d_{n+3} \dots$ ($d_{n+1}, d_{n+2}, d_{n+3}, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$), то положим

$$\varphi(x) := 0.d_{n+1} d_{n+2} d_{n+3} \dots \text{ в десятичной записи } = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots.$$

При этом $0.999\dots$ в десятичной записи — это 1, а $0.d_1 d_2 \dots d_n 999\dots$ ($d_n \neq 9$) — это десятичное $0.d_1 d_2 \dots d_{n-1}(d_n + 1)$.

Покажите, что функция $\varphi\colon [0,1) \to [0,1]$ *всюду сюръективна* в следующем смысле: для любого непустого открытого интервала $I \subset [0,1)$ и для любого $y \in [0,1)$ найдётся такое число $x \in I$, что $\varphi(x) = y$.

2. (1.5 балла) Пусть $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2 + \frac{3}{x_n} + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Докажите, что последовательнось $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, найдите ее предел и предъявите хотя бы одну функцию $N(\varepsilon)$.

3. (1 балл) Покажите, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу в том и только в том случае, если прообраз $f^{-1}\left((a, +\infty)\right)$ открыт в $\mathbb{R}$ при любом $a \in \mathbb{R}$.

4. (2+2 балла) Числовая последовательность $\{x_n\}_n$ удовлетворяет правилу $x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1}$. Если в знаменателе получился нуль, то все последующие члены равны ∞. а) Найдите все значения начального члена x_0, при которых $x_n \to 0$; б) найдите все возможные пределы последовательности $\{x_n\}_n$.

5. (2.5 балла) Пусть P — многочлен двух переменных, такой что для всяких вещественных x, y значение P положительно. Верно ли, что существует некоторая константа $\delta > 0$, такая что всегда $P(x,y) > \delta$?

6. (2 балла) Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ такова, что $x_{n+1} - x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Докажите, что множество предельных точек этой последовательности — это отрезок, луч или прямая.

7. (2.5 балла) Докажите, что любое открытое подмножество $X \subset \mathbb{R}$ ($X \neq \mathbb{R}$) представимо в виде не более чем счётного объединения попарно не пересекающихся открытых интервалов и лучей (*дизъюнктного объединения*).

Рейтинговые задачи

8. а) Пусть M — подмножество прямой, а $f\colon M \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что существует непрерывная функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, продолжающая функцию f (то есть, на M это та же функция, что и f).

Отображение $f\colon M \to N$ между метрическими пространствами называют *липшицевым*, если величина

$$\sup_{x \neq y \in M} \frac{\rho_N(f(x), f(y))}{\rho_m(x, y)}$$

конечна. Эта величина называется *константой Липшица* отображения f.

б) Пусть M — подмножество прямой, а $f\colon M \to \mathbb{R}$ — липшицева функция. Докажите, что существует липшицева функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с той же константой липшицевости, что и у f, продолжающая функцию f.

в) Пусть на плоскости даны тройки точек A, B, C и A', B', C', такие что $|AB| \geq |A'B'|$, $|AC| \geq |A'C'|$ и $|BC| \geq |B'C'|$. Докажите, что для всякой точки X найдется точка X', такая что $|A'X'| \leq |AX|$, $|B'X'| \leq |BX|$ и $|C'X'| \leq |CX|$.

г) Пусть M — подмножество $\mathbb{R}^2$, а $f\colon M \to \mathbb{R}^2$ — липшицево отображение. Докажите, что существует липшицево отображение $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с той же константой липшицевости, что и у f, продолжающее f (то есть, на M это то же отображение).

9. Докажите, что не существует отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и постоянной $C \in (0, +\infty)$ таких, что

$$|\varphi(p_1) - \varphi(p_2)| \geq C \cdot |p_1 - p_2|$$

при любых $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$. Здесь слева стоит модуль вещественного числа, а справа — евклидова длина двумерного вектора (то есть просто расстояние между точками p_1 и p_2).

10. Для каждого $a > 0$ определим последовательность рекуррентно: $x_{n+1} = x_n^{x_n/n}$, $x_1 = a$. Докажите, что существует число $b > 1$, такое что при всех $a < b$ построенная последовательность ограничена, и не ограничена при $a \geq b$.

11. Пусть $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}_+$ — неубывающая непрерывная функция. Неубывающую функцию $g\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ назовём *предельной формой* функции f в том случае, если найдётся убывающая к нулю последовательность r_j, такая что для всякого $x \in [1, \infty)$, являющегося точкой непрерывности g, верно

$$g(x) = \lim_{j \to \infty} \frac{f(r_j x)}{f(r_j)}$$

Докажите, что если для некоторого $s > 0$ и некоторой последовательности $\rho_j \searrow 0$ верно неравенство $f(\rho_j) \geq \rho_j^s$, то функция f имеет предельную форму.

12. Пусть P — многочлен двух переменных, такой что для всяких вещественных x, y значение $P(x, y)$ положительно, кроме начала координат, где у нашего многочлена корень. Верно ли, что существует некоторая константа $N > 0$, такая что всегда $P(x, y) > (x^2 + y^2)^N$ при достаточно малых x, y?

13. Даны $n \in \mathbb{N}$ и $M > 0$. На доске написаны n вещественных чисел, каждое из которых не превосходит M по абсолютной величине. Каждую секунду Дональд может взять два написанных числа a и b, стереть их с доски и написать вместо них числа a' и b' так, что:

- $a' + b' = a + b$;
- если $|a - b| \leq 1$, то $|a' - b'| \leq 1$; если же $|a - b| > 1$, то $|a' - b'| \leq |a - b|$.

Докажите, что существует постоянная $C = C(n, M) \in (0, +\infty)$, зависящая только от n и M, такая, что числа на доске всегда не будут превосходить C по абсолютной величине (сколь бы долго Дональд ни стоял у доски).