О подгруппах линейных групп над кольцами

Яков Нужин, Алексей Степанов

СФУ, СПбГУ

Постановка задачи

Пусть $G = SL_n$ – специальная линейная группа, $n \geqslant 3$, а K – подкольцо коммутативного кольца A с 1.

Проблема

Описать решетку подгрупп, лежащих между группами $G(K)$ и $G(A)$.

$$\mathscr{L} = L\big(E(K), G(A)\big)$$

$$E(R) := \langle e + re_{ij} \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ r \in R \rangle.$$

Стандартный ответ

Оказывается, что в стандартной ситуации все такие подгруппы лежат "недалеко" от групп $G(R)$ над промежуточными подкольцами R.

Определение

Решетка $\mathscr{L}$ называется стандартной, если она разбивается в дизъюнктное объединение так называемых "сэндвичей"

$$L\big(E(R), N_A(R)\big),$$

где R – подкольцо в A, а $N_A(R)$ – нормализатор $E(R)$ в $G(A)$.

При этом факторгруппа $N_A(R)/E(R)$ для конечномерных колец разрешима, а для колец размерности Крулля $\leqslant 1$ совсем небольшая и чаще всего может быть явно вычислена.

Группы Шевалле

Вместо SL_n в качестве G можно рассмотреть другую расщепимую классическую группу или даже группу Шевалле.
Каждая группа Шевалле почти полностью характеризуется системой корней – конечным набором векторов, обладающим большим запасом симметрий.
Система корней групп SL_n и SO_{2n} обозначаются A_{n-1} и D_n соответственно.
Все корни в этих системах имеют одинаковую длину. Такие системы называются системами с простыми связями.
Системы корней B_n и C_n для групп SO_{2n+1} и Sp_{2n} содержат корни разной длины. Говорят, что такие системы имеют двойные связи.
Далее, $G = G(\Phi, \_)$ – группа Шевалле с системой корней Φ.

Система корней с двойными связями, двойка обратима

Удивительно, но получающиеся результаты о стандартности решетки $\mathscr{L}$ для групп Шевалле, отвечающих системам корней с простыми и двойными связями, абсолютно разные.
Грубо говоря, для систем с двойными связями стандартное описание выполнено всегда, а с простыми связями – только при очень жестком условии на расширение колец.

Теорема (ABC 2012)

Пусть Φ – система корней с двойными связями (т. е. $\Phi = B_n, C_n, F_4$), и $1/2 \in K$. Тогда решетка $\mathscr{L}$ стандартна.

Система корней с двойными связями, двойка не обратима

В случае системы корней с двойными связями и необратимой двойки понятие стандартности необходимо расширить, добавив сэндвичи, соответствующие допустимым парам (одна аддитивная подгруппа на длинных корнях, другая – на коротких).

Теорема (Э. Бак, ABC 2016; ЯНН, ABC 2019)

Пусть $\Phi = B_n, C_n$, $n > 2$ и $2 = 0$ в K. Тогда решетка $\mathscr{L}$ стандартна.

Проблема

Доказать стандартность описания решетки $\mathscr{L}$ при $\Phi = F_4$ и $2 = 0$.

Следующая задача может быть очень сложной.

Проблема

Доказать стандартность описания решетки $\mathscr{L}$ для систем корней с двойными связями или построить контрпример.

Квази-алгебраические расширения колец I

Сформулируем теперь условие на расширение колец, которое гипотетически равносильно стандартности решетки $\mathscr{L}$ для групп Шевалле, отвечающих системам корней с простыми связями.

Определение

Элемент $r \in A$ называется квази-алгебраическим над K, если существует многочлен над K с унимодулярной строкой коэффициентов, корнем которого является r.
Кольцо A называется квази-алгебраическим над K, если все его элементы квази-алгебраические.

Грубо говоря, квази-алгебраическими являются только целые расширения, и локализации одномерных колец.

Квази-алгебраические расширения колец II

Теорема (АВС 2004)

Пусть A – область целостности, а K – конечнопорожденная алгебра над полем или над $\mathbb{Z}$.
A является квази-алгебраическим расширением K тогда и только тогда, когда

1. *A целое расширение K или*
2. $\dim K \leqslant 1$ *и A содержится в алгебраическом замыкании поля частных кольца K.*

Проблема

Сформулировать и доказать аналог предыдущей теоремы без дополнительных условий на A и K.

Нестандартное расположение подгрупп

В следующей теореме построен класс контрпримеров к стандартности решетки $\mathscr{L}$.

Теорема (ABC 2010)

Пусть Φ – система корней с простыми связями, т.е. $\Phi = A_n, D_n, E_n$.
Если A не является квази-алгебраическим над K, то решетка $\mathscr{L}$ не стандартна.

Если A не является квази-алгебраическим над K, то задача описания решетки $\mathscr{L}$ включает в себя задачу описания решетки $L\big(E(F), G(F[t])\big)$, где F – поле.

Теорема (ABC 2010)

Пусть Φ – система корней с простыми связями, G – присоединенная группа Шевалле типа Φ, а F – поле.
Существует $g \in E(F[t])$ такой, что подгруппа, порожденная $E(F)$ и g равна свободному произведению $E(F) * \langle g \rangle$.

Стандартное расположение для любой системы корней

Пусть $\Phi \neq A_1$ – система корней. Если $\Phi = C_2 = B_2$, то предположим, что $1/2 \in K$.

Теорема (ЯНН 1983; ЯНН 2013)

Если A – алгебраическое расширение поля K, то решетка $\mathscr{L}$ стандартна.

Теорема (ЯНН, А. В. Якушевич 2000)

Если A – поле частых области главных идеалов K, то решетка $\mathscr{L}$ стандартна.

Проблема

Ослабить условие предыдущей теоремы, взяв в качестве K дедекиндово кольцо.

Это сделано для $\Phi = A_n, D_n$. Так что основная проблема с $\Phi = E_6, E_7, E_8, G_2$.

Гипотеза

Приведенные результаты позволяют выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза

Пусть Φ – система корней ранга большего 2, или $\Phi = C_2$ и $1/2 \in K$. Решетка $\mathscr{L}$ стандартна тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1. *Φ – система корней с кратными связями;*
2. *A является квази-алгебраическим над K.*

Идея доказательства теоремы Нужина

Теорема (ЯНН 1983; ЯНН 2013)

Если A – алгебраическое расширение поля K, то решетка $\mathscr{L}$ стандартна.

Иллюстрируем на $G = SL_n$.
Пусть R – максимальное подполе в A такое, что $E(R) \leqslant H$.
Пусть $g = uhv \in H \setminus N_A(R)$, где u – нижняя, v – верхняя унитреугольные матрицы, а h – диагональная.
$gt_{1n}(r)g^{-1} = u(ht_{1n}(r)h^{-1})u^{-1} = ut_{1n}(ar)u^{-1} \in H$ для любого $r \in R$.
Умножая предварительно g на матрицы из $E(K)$ можно сделать так, чтобы $a \notin R$.
$t_{1n}(r) = ut_{1n}(r)u^{-1} \in H$ для любого $r \in R$.

Лемма Диксона–Башкирова

Теорема (Л. Диксон $\approx$ 1905, Е.Л.Башкиров 1982)

Пусть $R \subseteq A$ – поля, $a \in A$ – алгебраический элемент над R.
Тогда $\langle t_{12}(ar), t_{21}(r) \mid r \in R \rangle = SL_2(R[a])$.

В нашем случае из этой леммы следует, что $ut_{1n}(a)u^{-1} = t_{1n}(a) \in H$ – противоречие.

Идея доказательства стандартности для целого расширения колец

В доказательстве теоремы Нужина взять подсистему типа A_2 вместо подсистемы типа A_1.
Другими словами, вместо $gt_{1n}(r)g^{-1}$ рассмотреть

$$gt_{1n}(r_1)t_{1\,n-1}(r_1)t_{2n}(r_3)g^{-1},\ \text{где } r_1, r_2, r_3 \in R.$$