Листочек 5. Многомерный. Математический анализ. 1 курс.

Выдан: 9 марта 2021 г. Дедлайн: 1 апреля 2021 г.

Базовые задачи

1. (1 балл) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество. Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *плоская* на множестве K, если для любого $M \in \mathbb{N}$ найдётся постоянная $C = C_M \in (0, +\infty)$, для которой

$$|f(x)| \le C \cdot (\mathrm{dist}(x, K))^M \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

($\mathrm{dist}(x, K) = \inf\{|x - y|\colon y \in K\}$). Покажите, что если $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — плоская на K, то и все её частные производные любых порядков также плоские на K.

2. (1 балл) Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна вместе со своими первыми производными, обращается в нуль в начале координат, а также удовлетворяет неравенствам

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big|(x, y) \le 2|x - y|, \quad \Big|\frac{\partial f}{\partial y}\Big|(x, y) \le 2|x - y|.$$

Докажите неравенство $f(5, 4) \le 1$. Может ли оно обращаться в равенство?

3. Вычислите интегралы

$$\text{а) (0,5 балла)} \quad \int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + 2bx + b^2}}, \qquad a, b > 0;$$

$$\text{б) (1 балл)} \quad \int\limits_{0}^{1} \log x \log(1 - x)\, dx.$$

4. (1 балл) Постройте такую функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, что:

- f не имеет предела в начале координат;
- $f(x, y) \to 0$, когда $(x, y) \to (0, 0)$ вдоль любой кривой вида $c_1 x^m = c_2 y^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 \ne 0$);
- f непрерывна вне начала координат.

5. (1 балл) Найдите асимптотику суммы

$$\sum_{k=1}^{n^3} \Big(\frac{n^2 + 1}{n^2}\Big)^{-k^2}. \tag{1}$$

6. (1 балл) Найдите максимум выражения

$$\sum_{j=1}^{d-1} x_j x_{j+1} \quad \text{при условии} \quad \sum_{j=1}^{d} x_j^2 = 1.$$

Рейтинговые задачи

7. Пусть $g\colon (0,1] \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Докажите, что существует непрерывная функция $f\colon (0,1] \to \mathbb{C}$ такая что $|f(x)| = |g(x)|$ для всякого $x \in (0,1]$ и несобственный интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ сходится.

8. Существует ли функция $f\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$, класса C^∞ вне начала координат, такая что её вторые чистые производные непрерывны и равномерно ограничены на области определения, а вторая смешанная производная не ограничена в окрестности начала координат?

9. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — трижды непрерывно дифференцируемая 2π-периодическая функция, такая что кривая $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$ пересекает любую плоскость в $\mathbb{R}^3$ лишь по конечному числу точек. Докажите, что кривая γ меняет знак кручения не менее четырёх раз (кручение определяют в курсе геометрии, знак кручения кривой γ положительной кривизны в точке t равен знаку определителя матрицы, составленной из векторов $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)$).

10. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Может ли замкнутая кривая $\gamma(t) = (f'(t), f''(t), f'''(t))$ быть эквивалентна узлу "трилистник" (то есть, мы предполагаем, что кривая не имеет самопересечений и интересуемся, может ли она быть переведена непрерывной деформацией, избегающией самопересечений в любой момент, в кривую $(\sin t + 2\sin 2t, \cos t - \cos 2t, -\sin 3t)$)?

11. Пусть $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ — открытый единичный диск на плоскости с центром в нуле, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ бесконечно гладкая, причём $f|_{\mathbb{T}} \equiv 0$. Докажите, что если у f есть две различные точки строгого локального максимуа в диске $\mathbb{D}$, то у f есть и ещё хотя бы одна критическая точка в $\mathbb{D}$.

12. Пусть $u, v \in [0,1]$ и $q \in (1,2)$. Докажите неравенство

$$(u+v)^{q-1}(v^{2-q} - u^2) \le (1-u)^{q-1}(u^2 + (q-1)(1+v)u + v).$$

13. Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль на концах отрезка. Докажите неравенство

$$\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \le \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx.$$