Занятие 6. Дифференцирование функций нескольких переменных.

17 марта 2021 г.

Старые задачи

1. Определите, есть ли у неё частные производные; производные по направлениям; дифференциал в точке $(0, 0)$ и в случае наличия вычислите.

- $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;
- $f(x, y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ (и $f(0, 0) = 0$).

Новые задачи

2. Найдите производную данной функции в данном направлении в данной точке.

- $f(x, y) = x \sin(x + y)$, направление $(-1, 0)$, точка $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;
- $\log(x^2 + y^2 + z^2)$, направление $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, точка $(1, 2, 1)$;
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$, направление $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3})$, точка $(1, 3, 2, 1)$.

3. Пусть f — непрерывно-дифференцируемая функция своих аргументов. Вычислите дифференциал следующих функций

- $f(t, t^2, t^3)$, где $t \in \mathbb{R}$;
- $f(x^2 + y^2 + z^2)$ где $x, y, z \in \mathbb{R}$;
- $f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, xy)$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Дана непрерывно дифференцируемая в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. Докажите, что диффeрецниальное уравнение $\sum x_i \partial f / \partial x_i = p \cdot f$ равносильно положительной однородности порядка p: $f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^p f(x_1, \ldots, x_n)$ при $t > 0$.

5. Пусть P — многочлен. Докажите, что

$$\frac{\partial^2 P(x + iy)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x + iy)}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциальный оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ называют оператором Лапласа и обозначают буквой Δ. Функции u, удовлетворяющие (в каком-то смысле) уравенению $\Delta u = 0$ называют гармоническими.

6. Исследуйте следующие функции на экстремумы:

1. $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$;
2. $u = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x$;
3. $u = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2$;
4. $f(x, y) = x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1$.