

Занятие 11. Замена переменных

28 апреля 2021 г.

Новые задачи

1. Запишите следующие уравнения в новых переменных u и v :

1. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, где $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ и $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$;

2. $z_{xx} + z_{yy} + m^2 z = 0$, где $x = e^u \cos v$ и $y = e^u \sin v$.

2. Найдите общий вид функции z , удовлетворяющей уравнению

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} = 0,$$

где $B^2 - AC > 0$.

3. Преобразуйте уравнение, перейдя к новым переменным:

А) $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$;

Б) $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, $xyz \neq 0$,

приняв за новые переменные $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, и за новую функцию $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

4. Каким дифференциальным уравнениям должны удовлетворять функции φ и ψ , чтобы уравнение Лапласа

$$\Delta z = z_{xx} + z_{yy} = 0$$

переходило в себя при замене $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$?