Листочек 4. Новогодний.
Математический анализ. 1 курс.

Выдан: 11 февраля 2021 г. Дедлайн: 25 февраля 2020 г.

Базовые задачи

1. (0.5 балла) Пусть f и g суть кусочно-монотонные непрерывные функции на положительной полуоси, имеющие лишь конечное число интервалов монотонности. Пусть f стремится к нулю на бесконечности, а несобственный интеграл $\int_0^\infty f(x)dg(x)$ сходится. Докажите, что функция fg тоже стремится к нулю на бесконечности, интеграл $\int_0^\infty g(x)df(x)$ сходится, а также верна формула

$$\int\limits_0^\infty f(x)dg(x) = -f(0)g(0) - \int\limits_0^\infty g(x)df(x).$$

2. Вычислите интегралы (0.5+1 балл)

$$a)\int\limits_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,dx,$$

$$b)\int\limits_0^\infty \frac{\pi(x)}{x^3-x}\,dx,$$

где $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x.

3. (0.5+0.5+0.5 балла) Пусть f — функция на прямой. Зададим функцию f^*, называемую преобразованием Лежандра функции f, согласно формуле

$$f^*(\zeta) = \sup_x \big(\zeta x - f(x)\big).$$

1. Докажите, что f^* — выпуклая функция;
2. Докажите, что если сама функция f выпукла, то имеет место равенство $f = f^{**}$;
3. Пусть f — строго выпуклая функция и пусть f дифференцируема в окрестности точки x_0. Докажите, что функция f^* дифференцируема в окрестности точки $f'(x_0)$ и имеет место равенство $(f^*)'(f'(x_0)) = x_0$.

4. (1 балл) Пусть $f \in C([0,1])$. Докажите, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_0^1 \cos(\lambda x) f(x)\,dx = 0.$$

5. (1 балл) Докажите, что число положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами не превосходит количества перемен знака последовательности его коэффициентов.

Рейтинг

6. Пусть $f\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ — координатно-выпуклая ограниченная функция, равная нулю в начале координат. Докажите неравенство

$$\varliminf_{t\to 0+} \frac{f(t,t)}{t} + \varliminf_{t\to 0+} \frac{f(-t,-t)}{t} \geq 0.$$

7. Пусть q — чётное натуральное число. Докажите милое равенство:

$$\sum_{j=1}^{q-2} \left(1 - \frac{\cos\frac{(2j+1)\pi}{q}}{\cos\frac{\pi}{q}}\right) \log\left(1 - \frac{\cos\frac{(2j+1)\pi}{q}}{\cos\frac{\pi}{q}}\right) =$$

$$(1-\log 2)q + 2\log 2 + \frac{2}{q\cos\frac{\pi}{q}} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{q\pi}{4}} \log(\cos^2 z) \sin\frac{2z}{q}\, dz - q\log\cos\frac{\pi}{q}.$$

8. Пусть h — функция натурального аргумента n, для которой $\lim h(n)/n = 0$. Докажите, что существует сходящийся по Чезаро ряд $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ такой, что $h(n)\cdot a_n$ ограничено, но ряд $\sum a_n$ расходится. (Напомним, ряд сходится по Чезаро, если последовательность $(S_0 + \ldots + S_{n-1})/n$ имеет конечный предел, где $S_k = a_0 + \ldots + a_k$. Сходящийся ряд всегда сходится по Чезаро. Тауберова теорема Харди утверждает, что если na_n ограничено, то сходящийся по Чезаро ряд $\sum a_n$ сходится.)

9. Докажите, что если $m_1 < m_2 < \ldots$ — быстро растущая последовательность натуральных чисел, то есть $m_k > \rho\cdot m_{k-1}$ при некотором $\rho > 1$, не зависящем от k, то из существования предела $\sum a_n x^{m_n}$ при x, возрастающем к 1, следует сходимость ряда $\sum a_n$.

10. Докажите, что существует вещественное число λ, такое что двойная последовательность $\{|P(m,n)|\}_{m,n}$ стремится к бесконечности, где $P(x,y) = x^6 - \lambda y^6$, но при этом не существует положительных ε и D, таких что $|P(m,n)| \geq D(m^2+n^2)^\varepsilon$ для всех натуральных m и n.