Листочек 6. Снова многомерный.
Математический анализ. 1 курс.

Выдан: 4 мая   Дедлайн: 25 мая 2021 г.

Базовые задачи

1. (0.5+1+1.5 балла) Пусть F — дважды непрерывно-дифференцируемая функция на плоскости, удовлетворяющая уравнению

$$\det\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix}(x,y) = h(x,y),$$

где h — строго положительная непрерывная функция (то есть, существует число $\delta > 0$, такое что для всяких $x, y \in \mathbb{R}$ верно $h(x,y) > \delta$). Рассмотрим функцию $F^*\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданную уравнением

$$F^*(p,q) = px + qy - F(x,y), \quad p = F_x(x,y), q = F_y(x,y).$$

а) Докажите, что функция F^* корректно определена на всей плоскости. б) Докажите, что функция F^* дважды непрерывно дифференцируема и выпукла. в) Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция F^*?

2. (1+1 балл) Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки на комплексной плоскости, а P — их выпуклая оболочка. а) Докажите, что всякий корень ζ производной многочлена $\prod_j (z - z_j)$ лежит в множестве P. б) Докажите, что для всякого j выполнено неравенство

$$|\zeta - z_j| \geq \frac{1}{n} \min |z_i - z_j|. \tag{1}$$

3. (1 балл) Пусть $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Докажите, что если в нуле у функции F существуют все частные производные, то она дифференцируема в нуле.

4. (1 балл) Пусть Φ — бесконечно дифференцируемая функция нескольких переменных, Z_Φ — множество ее нулей. Предположим, что множество критических точек Φ не пересекается с множеством Z_Φ. Докажите, что для всякой бесконечно дифференцируемой функции ψ, обнуляющейся на множестве Z_Φ, функция $\frac{\psi}{\Phi}$ бесконечно дифференцируема.

5. (0.5+0.5 балла) Пусть f — непрерывная функция на прямой, h — вещественный параметр. Рассмотрим функцию

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt.$$

а) Докажите, что функция f_h непрерывно дифференцируема при всяком $h > 0$. б) Докажите, что для всякого компактного подмножества прямой C имеет место равномерная сходимость $f_h(x) \to f(x)$, где $x \in C$, а $h \to 0$.

6. (1.5 балла) Пусть $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — дважды гладкая функция, причём ∇F не обращается в нуль на множестве $M = \{(x,y)\colon F(x,y) = 0\}$. Докажите, что прямая, касательная к M в точке $(x_0, y_0) \in M$ имеет касание второго порядка с M в этой точке тогда и только тогда, когда

$$\left(F''_{xx} \cdot (F'_y)^2 - 2F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy} \cdot (F'_x)^2\right)(x_0, y_0) = 0.$$

7. (1.5 балла. *Равномерная сходимость на компактах*) На линейном пространстве $C(\mathbb{R})$ непрерывных функций вещественного переменного введём *сходимость*: будем говорить, что последовательность $\{f_j\}_{j\in\mathbb{R}} \subset C(\mathbb{R})$ сходится к $f \in C(\mathbb{R})$, если для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}$ функции f_j сходятся к f равномерно на K. Покажите, что на $C(\mathbb{R})$ нельзя ввести норму, которая порождает в точности эту сходимость.

Рейтинговые задачи

8. Пусть $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, такая что для всяких $x, \lambda \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$v(x) \leq \int\limits_0^1 v(x + \lambda\cos(2\pi t))\,dt.$$

Докажите, что v — выпуклая функция.

9. Пусть f — трижды непрерывно дифференцируемая функция, такая что f' строго выпукла на луче $(-\infty, 0)$ и строго вогнута на луче $(0, +\infty)$. Докажите, что существуют функции $a, b\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, такие что для всякого числа $\ell \in (0, +\infty)$ выполнено равенство

$$\frac{f'(a) + f'(b)}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad b - a = \ell, \quad \text{где} \quad a = a(\ell), b = b(\ell).$$

10. Докажите, что при всяком γ, $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$, функция

$$F(\alpha) = e^{1 + \frac{\sin\alpha - \cos\alpha - \sin\gamma}{\cos\gamma}} - 2 + \cos\alpha e^{-\alpha} + \sin\gamma e^{-\alpha}$$

принимает лишь неположительные значения при $0 \leq \alpha \leq \gamma$.