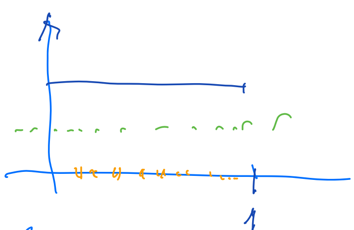
## Введение: Ф-ия Дирихле.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

**Q:** Как определить и-л так чтобы

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$




$V_\varepsilon \supset [0,1] \cap \mathbb{Q}$

"длина" $V_\varepsilon < \varepsilon$

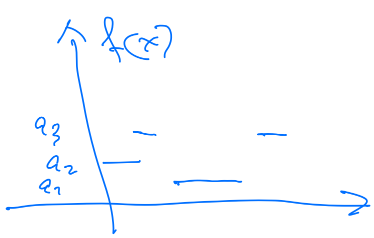
Интуитивно:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx 1 \cdot \text{длина}([0,1] \setminus V_\varepsilon) + 0 \cdot \text{длина}(V_\varepsilon)$$

$$\geq 1 - \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Более общий случай




$V_{a_i} = \{x : f(x) = a_i\}$

$\int f\,dx = \sum a_i$ "длина" $V_{a_i}$

Идея: Дробить вертикальную ось а не горизонтальную.

## Нам нужно:

1) Научиться рассматривать сложно устроенные мн-ва (объединение счетного числа интервалов, например)

2) Научиться считать их длину. (Мера)

## План лекции

1. Алгебраические системы мн-в. (алгебры, кольца, полукольца)
2. Примеры.
3. Упражнение: произведение полуколец.
4. Определение меры.
5. Примеры.

6. Монотонность меры.

7. Важный инструмент: Простые ф-ии.

- Определение
- неоднозначность представления
- Сумма и произведение.

8. Элементарный интеграл.

а) Не связываемся с $\infty$

- определение
- независимость от представления простого ф-ии.
- линейность
- монотонность.
- инструмент: вычисление меры мн-ва с помощью и-ла.

б). Учитываем $\infty$ и смотрим как надо изменить формулировки.

9. Произведение мер.

КОНЕЧНЫЕ структуры.

Говорим: $\mathfrak{X}$ – некоторое универсальное мн-во
$\mathfrak{A}$ – набор его подмн-в.

(Представляем (з представлю).)

$\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{A}$ – набор подмн-в $\mathfrak{X}$

(неточно но для начала сойдёт).

I. Алгебраические структуры подмножеств.

$\mathfrak{A} \subset 2^{\mathfrak{X}}$

1) $\mathfrak{A}$ – алгебра если (всё можно).

a) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cap B,\ B \cup A,\ A \setminus B \in \mathfrak{A}$

$A \in \mathfrak{A},\quad \varnothing = A \setminus A$

b) $X \in \mathfrak{A}$

2) $\mathfrak{A}$ кольцо если есть a) и b).

3) $\mathfrak{A}$ - полукольцо:

$A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{A}$

$A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{n} C_j \quad C_j \in \mathfrak{A}$

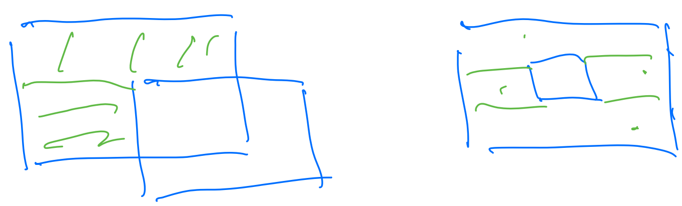
$C_j \cap C_k = \emptyset$

$j \neq k.$

Пример: (полукольцо)

v $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{ [a, b), \ a, b \in \overline{\mathbb{R}} \}$

v $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{ \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i), \ a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}} \}.$



Определение: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ - полукольца,

$\mathcal{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{ A \times B, \ A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B} \}$

Утверждение: $\mathcal{C}$ - полукольцо

Св-во полукольца:

Мы требуем $A_1, A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow$

полукольце

$$\Rightarrow A_1 \setminus A_2 = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

$C_j \in \mathfrak{A}$, $C_j \cap C_k = \emptyset$

$j \neq k$.

Утв: $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{A}$

$$A_1 \setminus (A_2 \cup A_3) = \bigcup_{j=1}^{N} C_j$$

дизъюнктны и из $\mathfrak{A}$.

Д-во:

$$A_1 \setminus (A_2 \cup A_3) =$$

$$= A_1 \setminus ((A_2 \setminus A_3) \cup A_3) =$$

$$= (A_1 \setminus \underbrace{(A_2 \setminus A_3)}_{\cup C_j}) \setminus A_3$$

$$\bigcap (A_1 \setminus C_j) = \bigcup D_j$$

$$\bigcup (D_j \setminus A_3)$$

Вообще:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \qquad \square$$

$$A_1 \setminus \left(\bigcup_{2}^{n} A_i\right) = \bigcup D_j$$

$D_j \in \mathfrak{A}$, дизъюнктные.

---

Вводим меру (все еще все конечно).

$$\mathfrak{X} \qquad \mathfrak{A} \subset 2^{\mathfrak{X}}$$

$\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – мера:

$$\{A_i\}_1^N \subset \mathfrak{A}, \quad A_i \cap A_k = \varnothing \quad i \neq k.$$

$$\bigcup_1^N A_i \in \mathfrak{A}$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_1^N A_i\right) = \sum_1^N \mu(A_i)$$

аддитивность.

Примеры:

$\mathfrak{X}$ – дискретное мн-во. $x \in \mathfrak{X}$

$\mu(\{x\}) = 1$

$X \subset \mathfrak{X}$ $\mu(X) = \sum\limits_{x \in X} 1$

Модификация:

$\mu(\{x\}) = p_x$

$\sum\limits_{x \in \mathfrak{X}} p_x = 1$

\# 3 длина $\mu([a,b)) = b - a$.

\# 4 $f(t) \nearrow$ квазидлина.

$\mu([a,b)) = f(b) - f(a)$.

Монотонность: $A, B \in \mathfrak{A}$ – полукольцо.

$B \subset A \Rightarrow \mu(A) \geq \mu(B)$.

Д-во: $A = B \cup (A \setminus B) = B \cup (\bigsqcup C_j)$

$\mu(A) = \mu(B) + \sum \mu(C_j)$.

Важный инструмент!

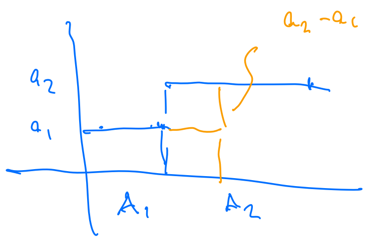
## Простые функции

$\mathfrak{A}$ - полукольцо. $A \in \mathfrak{A}$ $\quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Простая ф-ия = ф-ия вида

$$f(x) = \sum a_i \chi_{A_i}(x),$$

$A_i \in \mathfrak{A}$; $\quad a_i \in \mathbb{R}$




$a_1 \chi_{A_1} + a_2 \chi_{A_2}$

$a_1 \chi_{A_1} + (a_2 - a_1) \chi_{A_2 \cap A_1} +$

$+ a_2 \chi_{A_2 \setminus A_1}$

## Свойства простых ф-ий

1) Сумма простых ф-ий тоже простая
2) Произведение — и — ; —

## Элементарный интеграл.

Имеем: $\mathfrak{A}$, $\mu$ $\quad f(x) = \sum a_i \chi_{A_i}$

Определение:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \sum a_i \mu(A_i)}$$

а) Предполагаю все конечно.

1). Корректность определения:

$$f(x) = \sum b_j \chi_{B_j}(x)$$

Вспомогат. утв.:

I $\quad f(x) = \sum_i^{\prime} a_i \chi_{A_i}(x) =$

$= \sum b_j \chi_{B_j}(x) \qquad B_j$ - дизъюнкт.

$$A_1 \setminus (A_2 \cup \ldots \cup A_n) = B_1.$$

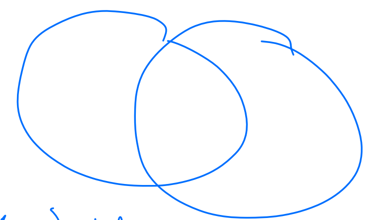
$$f(x) = a_1 \chi_{B_1} + \sum_2^{n}{}' (a_j - a_1) \chi_{A_j \cap A_1} + \sum_2^n a_j \chi_{A_j \setminus A_1}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\bigcup_2^n A_j}$$

$A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$

Индукция по $n$.

$A_1, A_2$



$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \underline{(A_1 \cap A_2)}$

$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) =$

$= (\underbrace{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_{n-1}}) \cup A_n$

$= (C_1 \cup C_2 \dots \cup C_N) \cup A_n =$

$= A_n \setminus (C_1 \cup C_2 \dots \cup C_N) \cup$
$(A_n \cap C_1) \cup (A_n \cap C_2) \cup \dots \cup (A_n \cap C_N)$

$f(x) = \sum a_i \chi_{A_i} =$

$\cup A_i = \bigsqcup C_j \qquad C_j \in \mathfrak{A}$

$$f(x) = \sum_i a_i \Big( \sum_{C_j \subset A_i} \chi_{C_j} \Big)$$

$$\int f(x)\, d\mu$$

$$\sum a_i \mu(A_i) = \sum a_i \underbrace{\sum_{C_j \subset A_i} \chi_{C_j}(x)}_{\chi_{A_i}}$$

---

$$f(x) = \sum b_k \chi_{B_k} = \sum \beta_l \chi_{D_l}$$

$$f(x) = \sum a_i \chi_{A_i} = \sum \alpha_m \chi_{C_m}.$$

$$x \in B_l \cap C_m \Rightarrow \alpha_m = \beta_l$$

$$f(x) = \sum_{l,m} \alpha_m \chi_{D_l \cap C_m}(x)$$

---

Техническое замечание:

$$\boxed{\int \chi_A := \mu(A).}$$

Св-ва интеграла:

1) Линейность. $f, g$ – изм. ф-ции, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g.$$ ✓

2) Монотонность:

$f, g$ – простые ф-ции, $f \le g$

$$\Rightarrow \int f \le \int g.$$

Д-во:
$$f(x) = \sum a_i \chi_{A_i}(x)$$
$$g(x) = \sum b_j \chi_{B_j}(x)$$

$$f(x) = \sum \alpha_k \chi_{C_k}(x); \; g(x) = \sum \beta_k \chi_{C_k}(x)$$

$\{C_k\}$ – дизъюнктное разбиение носителя.

$x \in C_k \Rightarrow f(x) = \alpha_k$
$\qquad g(x) = \beta_k.$

$f \le g \Rightarrow \alpha_k \le \beta_k.$

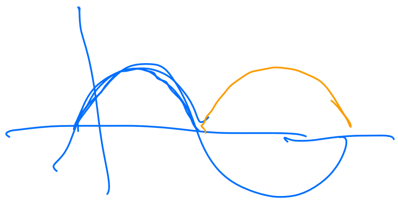
$$\int f = \sum \alpha_k \mu(C_k)$$
$$\wedge \setminus$$
$$\int g = \sum \beta_k \mu(C_k)$$

Включить $\infty$

$f$ – простая ф-ция.

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \ge 0 \\ 0 & f(x) \le 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \le 0 \\ 0 & f(x) > 0. \end{cases}$$



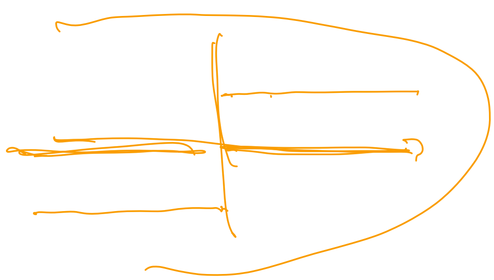
$f = f_+ - f_-$ — простые ф-ии.

$$I_+(f) = \int f_+$$

$$I_-(f) = \int f_-$$

Хотим:

$$I(f) \overset{?}{=} I_+(f) - I_-(f)$$



Рассматриваем только те простые ф-ии.

либо $I_+(f) < \infty$,

либо $I_-(f) < \infty$.

По определению:

$$I(f) = I_+(f) - I_-(f).$$

Св-ва: Монотонность — остаётся

Линейность тоже:

$f, g$ — простые ф-ии

и либо $I(f)$ либо $I(g)$ — конечные.

$$I(f-g) = I(f) - I(g)$$