

# Занятие 2. Теория меры, интегралы содержащие параметр

13 сентября 2021 г.

## Старые задачи

1. Для целого числа  $n$  рассмотрим функцию Бесселя  $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$ . Докажите тождество

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

## Новые задачи

### А. Теория меры

2. Пусть  $\mathfrak{A}$  -  $\sigma$ -алгебра в  $\mathfrak{X}$  и  $A_1, \dots$  элементы в  $\mathfrak{A}$ . Рассмотрим следующие множества элементов  $\mathfrak{X}$

- $\{x \in \mathfrak{X} : x \text{ принадлежит ровно пяти из } A_n\}$ ;
- $\{x \in \mathfrak{X} : x \text{ принадлежит всем, кроме пяти из } A_n\}$ ;

Эти множества принадлежат  $\mathfrak{A}$

3. Пусть  $\mu$  аддитивная функция на кольце  $\mathfrak{R}$  и  $A_1, \dots, A_n \subset \mathfrak{R}$ . Докажите формулу Пуанкаре:

$$\mu(\cup_1^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^n \mu(\cap_1^n A_i)$$

### Интегралы, содержащие параметр

4. Вычислите следующие интегралы.

1.  $\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{x^2(x^2+b^2)} dx, a, b > 0,$

2.  $\int_0^\infty \frac{e^{-x} - \cos x}{x} dx,$

3.  $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2ax) dx.$

4. Интеграл Френеля:

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx,$$

5.  $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx$  и  $\int_0^\infty \frac{x \sin(ax)}{1+x^2} dx,$

6. . Интеграл Фруланни:

Пусть  $f(x) \in C[0, \infty)$ ,  $f(x) \rightarrow 0$  as  $x \rightarrow \infty$  and  $\int_1^\infty \frac{|f(x)|}{x} dx < \infty$ . Тогда для  $a, b > 0$ ,

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}.$$