Занятие 7. Снова формула замены переменных, L^p

19 октября 2021 г.

Старые задачи

1. Вычислите интегралы, перейдя к полярным координатам

   a) $\int\limits_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz$, где $\Omega = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

2. Вычислите $\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, где

   a) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, Ω — область, ограниченная поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$;

   b) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, Ω — множество, где $f(x, y, z) \leq 1$.

Новые задачи

3. Вычислите интеграл $\iint_{\Omega} f$, сделав подходящую замену:

   1. $f(x, y) = (x^2 - y^2)\sin\pi(x - y)^2$, $\Omega = \{|y| \leq x \leq 1 - |y|\}$;
   2. $f(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\Omega = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq a\}$;
   3. $f(x, y, z) = |z|$, $\Omega = \{(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 \leq 4b^2(x^2 + y^2)\}$;
   4. $f(x, y, z) = xyz$, $\Omega = \{x \leq yz \leq 2x; y \leq xz \leq 2y; z \leq xy \leq 2z\}$.

Пространства L^p

1. . Пусть $1 \leq p < q$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$, $f \in L^q(\mathbb{R})$. Докажите, что $f \in L^r(\mathbb{R})$ при всех. $r \in [p, q]$.
2. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$. Докажите, что $\frac{1}{f} \notin L^1(\mathbb{R})$
3. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ бесконечной меры Лебега. Докажите, что существует $f \in L^2(A)$ такая, что $f \notin L^1(A)$.