Занятие 8. Разнообразное

26 октября 2021 г.

Пространства L^p, неравенство Гёльдера, ограниченные операторы

Старые задачи

Вычислите интеграл $\iint_\Omega f$, сделав подходящую замену:

1. $f(x,y,z) = |z|$, $\Omega = \{(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2 \leq 4b^2(x^2+y^2)\}$;
2. $f(x,y,z) = xyz$, $\Omega = \{x \leq yz \leq 2x; y \leq xz \leq 2y; z \leq xy \leq 2z\}$.
3. Пусть $1 \leq p < q$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$, $f \in L^q(\mathbb{R})$. Докажите, что $f \in L^r(\mathbb{R})$ при всех $r \in [p,q]$.
4. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$. Докажите, что $\frac{1}{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Новые задачи

1. Пусть последовательность f_n измеримых функций на $[0,1]$ сходится к нулю почти всюду. Докажите, что существует последовательность чисел $\{c_n\}$ такая, что $c_n > 0$, $\lim_n c_n = \infty$, но последовательность $c_n f_n$ почти всюду сходится к нулю.
2. Пусть $\mathfrak{A}$ - σ-алгебра, порожденная всеми одноточечными множествами в пространстве $\mathfrak{X}$. Докажите, что функция f измерима по отношению к $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда она постоянна на дополнении к некоторому не более чем счетному множеству.
3. Пусть функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу. Покажите, что функция $p \mapsto \|f\|_{L^p[0,1]}$ ($p \in [1,+\infty)$) не убывает. (Считаем $\|f\|_{L^p} = +\infty$, если $f \notin L^p$.)

   Иными словами, при $q > p$ оператор $T\colon L^q[0,1] \to L^p[0,1]$, заданный равенством $Tf = f$, $f \in L^q[0,1]$, корректно определён, ограничен (непрерывен), и его операторная норма $\|T\|_{L^q[0,1]\to L^p[0,1]}$ не больше единицы.
4. (*Оператор Гильберта – Шмидта*) Пусть $K(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to [-\infty,+\infty]$ — измеримая функция, причём $\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} |K(x,y)|^2\,dx\,dy < +\infty$. Покажите, что оператор $T\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $Tf(x) = \int_\mathbb{R} K(x,y)f(y)\,dy$ ($f \in L^2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$) ограничен.

Гамма-функция

5. Выразите интеграл

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right) dx_1 \dots dx_n$$

   через Г-функцию.

   Напоминание $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$

6. Пусть $B = \{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^n$. (Это единичный шар в нормированном пространстве $L^p(\{1, 2, \ldots, n\}, \#)$, $\#$ — считающая мера.

   Выразите I из предыдущей задачи через объём $\lambda_n(B)$, используя формулу:

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_0^\infty \mu\{x : f(x) \geqslant t\}\, dt$$

   для неотрицательной измеримой функции f на пространстве с мерой (X, μ).