Занятие 9. Теория меры и немножко теорема Стокса

26.10.21

Старые задачи

1. Пусть последовательность f_n измеримых функций на $[0,1]$ сходится к нулю почти всюду. Докажите, что существует последовательность чисел $\{c_n\}$ такая, что $c_n > 0$, $\lim_n c_n = \infty$, но последовательность $c_n f_n$ почти всюду сходится к нулю.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ - σ-алгебра, порожденная всеми одноточечными множествами в пространстве $\mathfrak{X}$. Докажите, что функция f измерима по отношению к $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда она постоянна на дополнении к некоторому не более чем счетному множеству.

3. a) Постройте последовательность. неотрицательных функций f_n на $[0,1]$ которые сходятся к нулю почти всюду, их интегралы тоже стремятся к нулю, но функция $\Phi(x) = \sup_n f_n(x)$ не суммируема. В частности, функции f_n не имеют суммируемую мажоранту.

   b) Постройте последовательность неотрицательных функций f_n на $[0,1]$ такую, что их интегралы стремятся к нулю, но, для каждого $x \in [0,1]$, имеем $\sup_n f_n(x) = +\infty$.

Новые задачи

Формула Стокса

- Используя формулу Грина, вычислить интеграл

$$\int_L (x-y)dx + (x+y)dy,$$

  здесь L - окружность радуиуса R

- Используя формулу Грина вычислить интеграл

$$\int_L (xy - x + \frac{1}{2}y^2 - y)dx + (xy - \frac{1}{2}x^2 - y)dy.$$

  Здесь L граница параболического сегмента, ограниченного кривыми $y = x^2 - 3x - 2$ и $y = x + 3$.

Теория меры

1. Пусть последовательность μ-интегрируемых функций f_n сходится к f в $L^1(\mu)$, а последовательность μ-измеримых функций ϕ_n равномерно ограничена и сходится к ϕ μ-почти всюду. Докажите, что $\phi_n f_n$ сходится к ϕf в $L^1(\mu)$.

2. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ измеримо по Борелю. Тогда его график $\{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^k\}$ явлается Борелевским множеством в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

3. Пусть μ вероятностная мера и неотрицательная μ-интегрируемая функция f такова, что $\log f \in L^1(\mu)$ Докажите

$$\lim_{a\to+0} \int \frac{f^a - 1}{a} d\mu = \int \log f d\mu.$$

   Подсказака: Воспользуйтесь теоремой о мажорируемой. сходимости.

4. Пусть функция $f \in L^1(\mathbb{R})$. Докажите, что ряд $\sum_n |f(x+n)|^2$ сходится при почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Упражнения на Γ-функцию

1. Выразите следующие интегралы через гамма-функцию

   - $$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^3};$$

   - $$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\sum\limits_{j=1}^{d} |x_j|^p} dx.$$