Занятие 10. Теория меры и немножко теорема Стокса

26.10.21

Старые задачи

1. Пусть последовательность μ-интегрируемых функций f_n сходится к f в $L^1(\mu)$, а последовательность μ-измеримых функций ϕ_n равномерно ограничена и сходится к ϕ μ-почти всюду. Докажите, что $\phi_n f_n$ сходится к ϕf в $L^1(\mu)$.

2. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ измеримо по Борелю. Тогда его график $\{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^k\}$ явлается Борелевским множеством в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

3. Пусть μ вероятностная мера и неотрицательная μ-интегрируемая функция f такова, что $\log f \in L^1(\mu)$ Докажите
$$\lim_{a \to +0} \int \frac{f^a - 1}{a} d\mu = \int \log f d\mu.$$
Подсказака: Воспользуйтесь теоремой о мажорируемой. сходимости.

4. Пусть функция $f \in L^1(\mathbb{R})$. Докажите, что ряд $\sum_n |f(x+n)|^2$ сходится при почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Новые задачи

Немножко кратных интегралов

Координаты центра тяжести пластинки находятся по формулам
$$x_c = \int_S x dx dy; \quad y_c = \int_S y dx dy;$$

- Наити координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.
- Доказать, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан

Неравенства для интегралов

1. Пусть $1 \leq r, p_1, \ldots, p_n < \infty$ и $1/p_1 + 1/p_2 + \ldots, 1/p_n = 1/r$ и $f_j \in L^{p_j}(\mu)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда
$$\left(\int_{\mathfrak{X}} |f_1 \cdots f_n|^r d\mu\right)^{1/r} \leq \left(\int_{\mathfrak{X}} |f_1|^{p_1} d\mu\right)^{1/p_1} \cdots \left(\int_{\mathfrak{X}} |f_1|^{p_n} d\mu\right)^{1/p_n}.$$

2. (*неравенство Йенсена*) Пусть μ вероятностная мера на пространстве $(\mathfrak{X}, \Sigma)$. Пусть f - суммируемая функция принимающая значения в области определения выпуклой функции Ψ, причем функция Ψ тоже суммируемая. Тогда

$$\Psi\left(\int_{\mathfrak{X}} f(x) d\mu\right) \leq \int_{\mathfrak{X}} \Psi(f(x)) d\mu$$

3. (*Неравенство Минковского для интегралов.*) Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mu)$, $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, \nu)$ два пространства с σ- конечными мерами и f это $\mu \otimes \nu$ измеримая функция и $p > 1$. Докажите, что

$$|| \int_{\mathfrak{Y}} f(x,y) d\nu_y ||_{L^p(\mu_x)} \leq \int_{\mathfrak{Y}} ||f(x,y)||_{L^p(\mu_x)} d\nu_y$$

4. (*Неравенство Минковского для интегралов.Продолжение.*) Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mu)$, $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}, \nu)$ два пространства с σ- конечными мерами и f это $\mu \otimes \nu$ измеримая функция. Докажите, что при $1 \leq p < q < \infty$ верно

$$\int_{\mathfrak{Y}} \left(\int_{\mathfrak{X}} |f(x,y)|^p d\mu(x)\right)^{q/p} d\nu(y) \leq \left(\int_{\mathfrak{X}} \left(\int_{\mathfrak{Y}} |f(x,y)|^q d\nu(y)\right)^{p/q} d\mu(x)\right)^{q/p}$$

5. Пусть функция f суммируемая на $[0,1]$ и $f(x) > 0$ при всех x. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое что

$$\int_E f(x) dx \geq \delta$$

для каждого множества E имеющего меру не меньше ϵ .