Занятие 3. Дифференцирование интегралов по параметру

21 сентября 2021 г.

Старые задачи

1. Пусть μ аддитивная функция на кольце $\mathfrak{R}$ и $A_1, \ \dots \ , A_n \subset \mathfrak{R}$. Докажите формулу Пуанкаре:

$$\mu\left(\cup_1^n A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ \dots \ + (-1)^n \mu\left(\cap_1^n A_i\right)$$

2. Вычислите следующие интегралы, дифференцируя по параметрам (будьте осторожны — важно следить за сходимостью интегралов!)

1. $\int\limits_0^\infty \sin\lambda \cos(\lambda x) \frac{d\lambda}{\lambda}$,
2. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\, dx$.
3. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{x^2(x^2+b^2)}\, dx$, $a, b > 0$,
4. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}-\cos x}{x}\, dx$,
5. $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\, dx$,
6. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, dx$ и $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{1+x^2}\, dx$,
7. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos(2ax)\, dx$.

3. Для целого числа n рассмотрим функцию Бесселя $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi$. Докажите тождество

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$