Занятие 4. Повторные интегралы

29 сентября 2021 г.

Новые задачи

1. Вычислите интегралы от функций двух переменных (по мере Лебега):

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = x\sin(y) + y\sin(x), &\quad X = \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big] \times \Big[0, \frac{pi}{2}\Big];\\
f(x,y) = \min(x,y), &\quad X = [0,a] \times [0,a];\\
f(x,y) = x^2, &\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\};\\
f(x,y) = y, &\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\};\\
f(x,y) = |x|, &\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\};\\
f(x,y) = \log y, &\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le \sqrt[3]{x}\}.
\end{aligned}
$$

2. Поменяйте порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{2\sin(x)} f(x,y)\,dy;$$

$$\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\log_3(y)} f(x,y)\,dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y)\,dx.$$

3. Пусть на множестве X задано семейство функций $F = \{f\}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Под *алгеброй $\sigma(F)$, порожденной этим семейством*, мы понимаем наименьшую σ-алгебру в X, по отношению к которой все функции $f \in F$ измеримы.

Пусть $F = \{f_1, f_2\}$. Докажите, что любая функция g, измеримая по отношению к $\sigma(F)$, имеет вид

$$g(x) = \psi(f_1(x), f_2(x)),$$

где ψ — измеримая по Борелю функция в $\mathbb{R}^2$.

4. Вычислите интегралы

$$\int\limits_0^1 \int\limits_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy;$$

$$\int\limits_{-1}^1 \int\limits_{\sqrt[3]{|x|}}^1 (1-y^2)^{\alpha}\,dy\,dx, \quad \alpha > 0.$$