

Занятие 8. Разнообразное

26.10.21

Пространства L^p

1. При каких значениях параметров p и α функция $(1 + |x|)^\alpha$ лежит в пространстве L^p ? Сначала в случае 1 переменной, потом в случае d переменных.
2. Такой же вопрос, как и в предыдущей задаче, только функция $|x|^\alpha e^{-|x|}$.

Повторение — мать учения

3. Вычислите интеграл $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, используя подходящую замену переменных. Здесь $f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}$, а Ω ограничена прямыми $y = 3x$, $3y = x$, $y = 4 - 5x$ и $y = 4 - x$.

Неравенство Гёльдера

4. Пусть $1 \leq p < q$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$, $f \in L^q(\mathbb{R})$. Докажите, что $f \in L^r(\mathbb{R})$ при всех $r \in [p, q]$.
5. Пусть функция $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по Лебегу. Покажите, что функция $p \mapsto \|f\|_{L^p[0,1]}$ ($p \in [1, +\infty)$) не убывает. (Считаем $\|f\|_{L^p} = +\infty$, если $f \notin L^p$.)
6. В условиях предыдущей задачи, докажите, что функция

$$\theta \mapsto \log \|f\|_{L^{\frac{1}{\theta}}}$$

выпукла и не возрастает.

7. Пусть функция f положительна и пусть её интеграл равен единице. Вычислите производную функции из предыдущей задачи в точке $\theta = 1$.

Упражнения на гамма-функцию

8. Докажите, что Γ функция дифференцируема бесконечное число раз.
9. Выразите следующие интегралы через гамма-функцию

•

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3};$$

•

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx;$$

•

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|^p} dx.$$