Листочек 8
Математический анализ. 2 курс

Выдан: 11 октября   Дедлайн: 7 ноября.

Базовые задачи

1. (1 балл) Существует ли число $x \in [0,1]$, такое что для всякого числа $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ в представлении числа x в n-ичной записи встречаются все цифры?

2. (2 балла) Пусть $U_1, U_2, \ldots$ — открытые подмножества отрезка $[0,1]$, такие что мера каждого из этих множеств не менее $1/239$. Всегда ли существуют числа $q_1, q_2, \ldots$, такие что объединение множеств $U_i + q_i$ содержит весь отрезок $[0,1]$?

Определение. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные пространства, оснащённые нормами. Линейное отображение $T\colon X \to Y$ называется *ограниченным оператором*, если существует такая постоянная $C < +\infty$, что $\|Tx\|_Y \le C \cdot \|x\|_X$ при всех $x \in X$. Наименьшая такая константа C называется *нормой* оператора T и обозначается $\|T\|_{X \to Y}$.

3. (2 балла) Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — два пространства с сигма-конечными мерами, функция $K\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ измерима. Пусть нашлись две функции $a\colon X \to (0, +\infty)$, $b\colon Y \to (0,+\infty)$ и числа $C_1, C_2 < +\infty$ такие, что

$$\int_X |K(x,y)| a(x)\, d\mu(x) \le C_1 \cdot b(y) \text{ для } \nu\text{-п.в. } y \in Y;$$
$$\int_Y |K(x,y)| b(y)\, d\nu(y) \le C_2 \cdot a(x) \text{ для } \mu\text{-п.в. } x \in X.$$

Докажите, что отображение $T\colon L^2(X,\mu) \to L^2(Y,\nu)$, заданное равенством $Tf := g\colon Y \to \mathbb{R}$, $g(y) = \int_X K(x,y) f(x)\, d\mu(x)$ ($f \in L^2(X,\mu)$, $y \in Y$) — ограниченный линеный оператор, а его норма не больше, чем $\sqrt{C_1 C_2}$.

4. (1.5 балла) Пусть $\mathfrak{c} \subset [0,1]$ — стандартное троичиное канторовское множество, а μ — *канторовская* мера на $\mathfrak{c}$. То есть, μ — борелевская мера на $[0,1]$ такая, что если I — интервал k-го поколения, возникающий при построении множества $\mathfrak{c}$ ($k = 0,1,2,\ldots$), то $\mu(I) = 2^{-k}$. (В частности, $\mu(\mathfrak{c}) = 1$.)

Для каких $\alpha > 0$ *энергия* $\int_{\mathfrak{c}}\int_{\mathfrak{c}} \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|x-y|^\alpha}$ будет конечной?

5. (1.5 балла) Пусть $X = Y = [0,1]$, оба множества оснащены борелевской сигма-алгеброй, μ — мера Лебега на X, ν — считающая мера на Y. Пусть $D = \{(x,x)\colon x \in [0,1]\}$ — диагональ. Покажите, что интегралы $\int_Y d\nu \int_X d\mu\, \mathbb{1}_D$ и $\int_X d\mu \int_Y d\nu\, \mathbb{1}_D$ существуют и различны.

6. (1.5 балла) Пусть G и w — положительные непрерывные суммируемые функции на пространстве $\mathbb{R}^d$ и $p \in [1, \infty)$. Предположим, что $\int G = 1$ и что функция G четна. Докажите неравенство

$$\|f * G\|_{L_p(w)} \le \|f\|_{L_p(w*G)}$$

для всякой функции $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, для которой правая часть конечна. Опишите случаи равенства. Свертка двух функций и норма в весовом пространстве определены стандартно:

$$g * h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x-y) h(y)\, dy; \quad \|g\|_{L_p(W)} = \Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}} |g(x)|^p W(x)\, dx\Bigr)^{\frac{1}{p}}, \quad p \ge 1. \tag{1}$$

7. (1.5 балла) Пусть Ω_j — последовательность выпуклых подмножеств квадрата $[0,1]^2$, мера Лебега каждого равна $1/239$. Докажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся индексы i и j, такие что мера множества $\Omega_i \cap \Omega_j$ хотя бы $1/239 - \varepsilon$.

8. (1.5 балла) Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f_n : X \to [0, \infty]$ $(n = 1, 2, \dots)$ — последовательность измеримых функций, сходящаяся поточечно μ-почти всюду к функции f. Пусть ещё μ-почти всюду $f_n \leqslant f$ для всех n. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Рейтинговые задачи

9. Будет ли ограниченным оператор $T : L^2[0,1] \to \ell^2$, заданный при $f \in L^2[0,1]$ равенством $Tf = (a_1, a_2, \dots)$, $a_n = \int_0^1 y^n f(y)\, dy$? (Здесь ℓ^2 — это L^2 по считающей мере $\sharp$ на множестве $\mathbb{N}$, то есть $\|(a_1, a_2, \dots)\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$.)

10. Пусть $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, вариация которой ограничена единицей, а носитель содержится в отрезке $[-1,1]$. Докажите, что существует константа C (не зависящая от функции g), такая что для всяких $y, z \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |g(x-y) - g(x-z)| \, dx \leq C|y-z|.$$

11. Пусть функция $\phi\colon [0,\infty) \to (0,1]$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$\varphi(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Пусть u — функция класса $C^1([0,1])$. Вычислите предел выражения

$$\frac{1}{n} \iint\limits_{[0,1]^2} \frac{\varphi(n|u(x)-u(y)|)}{|x-y|^2} \, dx \, dy$$

при $n \to \infty$.

12. Пусть μ — конечная, возможно знакопеременная, мера на прямой. Определим функцию двух переменных $u(x,t)$ формулой

$$u(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi \frac{|x-y|^2}{t}} \, d\mu(y), \quad t > 0.$$

а) Пусть мера μ неотрицательна. Докажите неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u^2(x,t) \, dx \leq t^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} u^2(x,1) \, dx, \quad t \in (0,1).$$

а) Для всякого $p \geq 1$ докажите, что величина $\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^p \, dx$ не возрастает по переменной t.

13. Пусть измеримая функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для почти всех пар $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что функция φ отличается от линейной лишь на множестве нулевой меры.