Листочек 7
Математический анализ. 2 курс
Выдан: 15 сентября Дедлайн: 6 октября.

Базовые задачи

1. (1.5 балла) Бывает ли счётная (но бесконечная) сигма-алгебра?

2. (1 балл) Докажите, что объединение любого семейства замкнутых отрезков прямой борелевски измеримо.

3. (1.5 балла) Измеримое множество A пространства X с мерой μ назовем *атомом*, если $\mu(A) > 0$, но для любого множества $B \subset A$ либо $\mu(B) = 0$, либо $\mu(B) = \mu(A)$. Докажите, что если у меры μ нет атомов, то для всякого числа $\alpha \in [0, \mu(X)]$ найдется измеримой множество A, такое что $\mu(A) = \alpha$.

4. (1.5 балла) Докажите, что измеримых *по Лебегу* подмножеств вещественной прямой $2^{\text{континуум}}$ штук.

5. (1.5 балла) **Неравенство Бонферрони.** Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — измеримые множества пространства (X, μ). Докажите неравенство

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu(E_i \cap E_j).$$

6. (1 балл) Пусть n — натуральное число, а подмножества $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *вероятностного* пространства (X, μ) таковы, что $\sum_{j=1}^{n} P(E_j) > n - 1$. Докажите, что у множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$ есть общая точка.

7. (1 балл) Будет ли измеримой функция типа Конвея $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ из самого первого листка (см. `https://math-cs.spbu.ru/wp-content/uploads/2020/09/List1.pdf`)? Отрезок $[0,1]$ с обеих сторон стрелки оснащён *борелевской* сигма-алгеброй.

8. (1 балл) Существует ли множество $A \subset \mathbb{R}$ нулевой лебеговой меры такое, что сумма Минковского $A + A$ содержит отрезок положительной длины?

Рейтинговые задачи

9. Пусть $\mathbb{D}$ — замкнутый единичный диск на плоскости. Пусть $B_1, B_2, B_3, \ldots$ — замкнутые диски, попарно не пересекающиеся и лежащие строго внутри $\mathbb{D}$. Докажите, что если $\sum_{n=1}^{\infty} r(B_n) < +\infty$, то $\lambda_2\left(\mathbb{D} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) > 0$; здесь $r(B_n)$ — радиус диска B_n, а λ_2 — двумерная мера Лебега, то есть площадь.

10. Пусть E — полное сепарабельное метрическое пространство, а F — какое-то другое метрическое пространство. Докажите, что если отображение $f\colon E \to F$ борелевски измеримо, то $f(E)$ — сепарабельно.

11. Докажите, что объединение любого семества замкнутых треугольников на плоскости измеримо по Лебегу.

12. Пусть $\{f_n\}_n$ — последовательность измеримых функций на измеримом пространстве X с мерой μ. Пусть

$$b_n = \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu\Big(\{x \in X \mid |f_n(x)| \geq \lambda\}\Big).$$

Докажите, что если сумма $\sum_n b_n(1 + |\log b_n|)$ конечна, то ряд $\sum_n f_n$ сходится почти всюду и для его суммы f имеет место неравенство

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu\Big(\{x \in X \mid |f(x)| \geq \lambda\}\Big) < \infty.$$

13. Пусть (X, μ) — измеримое пространство, такое что $\mu(X) = 1$. Пусть отображение $T\colon X \to X$ измеримо и сохраняет меру в том смысле, что для всякого измеримого множества $B \subset X$ выполнено равенство $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$. Пусть $A \subset X$ — измеримое множество. Докажите, что для почти всякой точки $a \in A$ найдется натуральное число n_a, такое что $T^{n_a}(a) \in A$.

14. Назовём вещественное число x почти рациональным, если существует $\kappa > 2$ такое, что неравенство $0 < |x - p/q| < q^{-\kappa}$ выполнено для бесконечно многих рациональных дробей p/q. Докажите, что почти любое вещественное число — не почти рациональное.